La fonction zêta de Riemann

De l'arithmétique à l'analyse

Sébastien Godillon

Arithmétique des entiers naturels

$$\begin{aligned} 12 + 5 &= 17 \\ 7 \times 6 &= 42 \end{aligned}$$

Arithmétique des entiers naturels

$$7 \times 6 \; = \; 42$$

Arithmétique des entiers naturels

$$42 \;=\; 7 \times 6$$

Arithmétique des entiers naturels

$$42 = 7 \times 6 = 7 \times 3 \times 2$$

Définition des nombres premiers

Un entier naturel p est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Définition des nombres premiers

Un entier naturel p est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc.

Contre-Exemples : 0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, etc.

Plus grand exemple connu (2008) : $2^{43112609} - 1$

Définition des nombres premiers

Un entier naturel p est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc.

Contre-Exemples : 0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, etc.

Plus grand exemple connu (2008) : $2^{43112609} - 1$

Question

Combien y a-t-il de nombres premiers ?

Théorème d'Euclide (≈300 av. J.-C.)

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

Théorème d'Euclide (≈300 av. J.-C.)

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

Démonstration

Supposons que $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

$$p = 1 + p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$$

Alors $p \in \mathcal{P}$ mais $p \notin \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. $\square$

Théorème d'Euclide (≈300 av. J.-C.)

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

Un autre exemple d'ensemble infini

L'ensemble des entiers naturels impairs est infini.

- La moitié des entiers naturels sont impairs.
- Un entier naturel sur deux est impair.
- Le $n^{\text{ième}}$ entier naturel impair est $i_n = 2n - 1$.

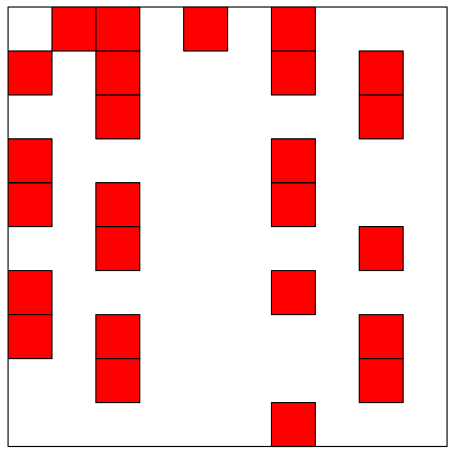
Théorème d'Euclide (≈300 av. J.-C.)

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

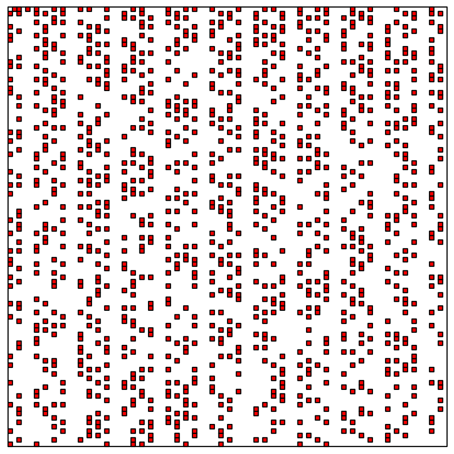
Questions

- Quel est la proportion de nombres premiers ?
- Comment sont-ils répartis dans $\mathbb{N}$?
- Existe-t-il une formule pour p_n ?

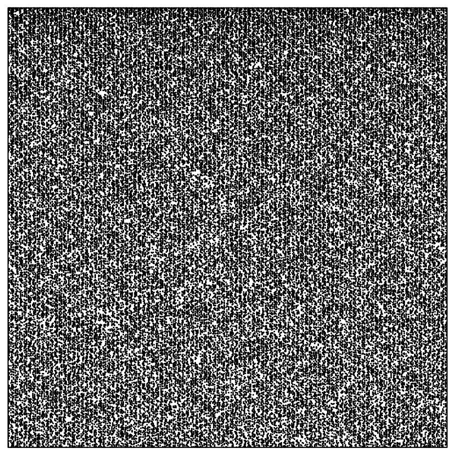
Répartition des nombres premiers inférieurs à $10 \times 10 = 100$



Répartition des nombres premiers inférieurs à $100 \times 100 = 10\,000$



Répartition des nombres premiers inférieurs à $1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$



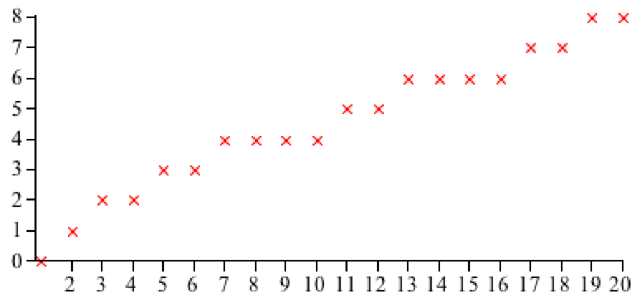
2 000 ans plus tard

Fonction de comptage des nombres premiers

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \pi(n) = \text{nombre de } p \in \mathcal{P} \text{ tel que } p \leqslant n \end{array}$$

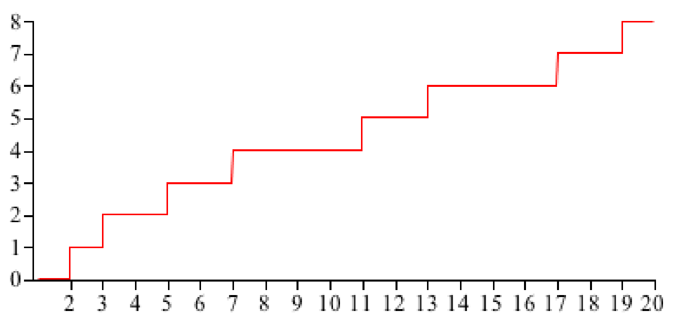
Fonction de comptage des nombres premiers

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \pi(n) = \text{nombre de } p \in \mathcal{P} \text{ tel que } p \leqslant n \end{array}$$



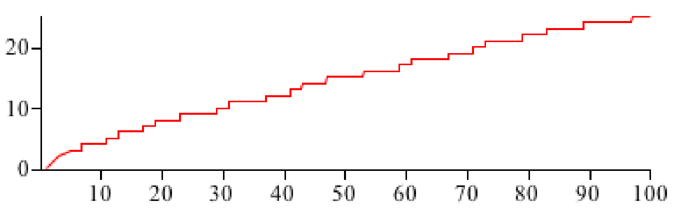
Fonction de comptage des nombres premiers

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \pi(x) = \text{nombre de } p \in \mathcal{P} \text{ tel que } p \leqslant x \end{array}$$



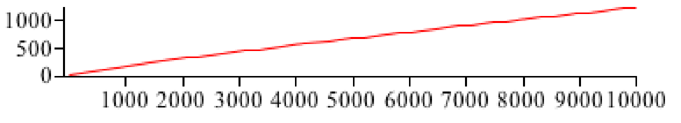
Fonction de comptage des nombres premiers

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \pi(x) = \text{nombre de } p \in \mathcal{P} \text{ tel que } p \leqslant x \end{array}$$



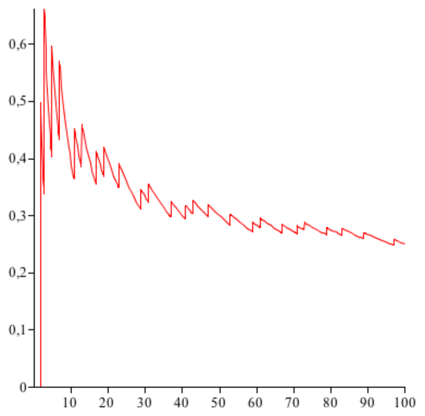
Fonction de comptage des nombres premiers

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \pi(x) = \text{nombre de } p \in \mathcal{P} \text{ tel que } p \leqslant x \end{array}$$



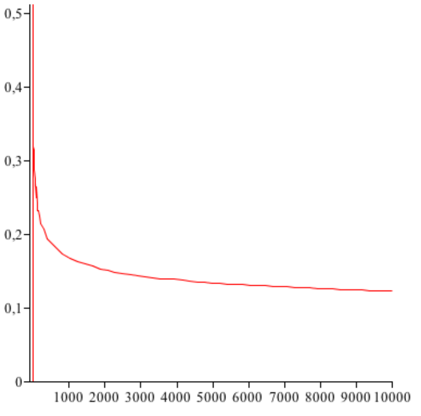
Proportion des nombres premiers

$$x \mapsto \frac{\pi(x)}{x} = \text{proportion de } p \in \mathcal{P} \text{ tel que } p \leqslant x$$



Proportion des nombres premiers

$$x \mapsto \frac{\pi(x)}{x} = \text{proportion de } p \in \mathcal{P} \text{ tel que } p \leqslant x$$



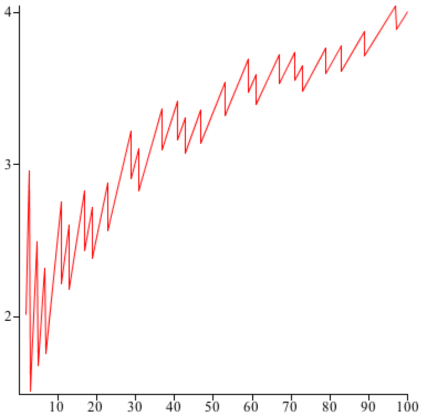
Question

La proportion des nombres premiers est-elle infiniment petite ?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x} \stackrel{?}{=} 0$$

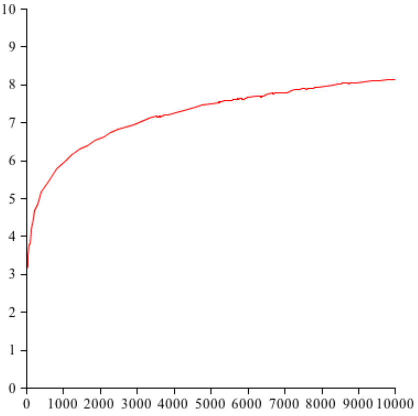
Comparaison

$$x \mapsto \frac{x}{\pi(x)} = \text{inverse de la proportion}$$



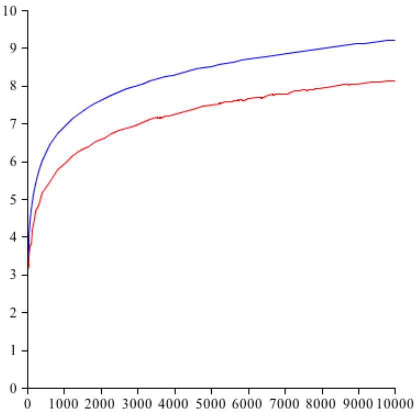
Comparaison

$$x \mapsto \frac{x}{\pi(x)} = \text{inverse de la proportion}$$



Comparaison à la fonction logarithme

$$\frac{x}{\pi(x)} \approx \ln(x) \Longleftrightarrow \frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln(x)}$$



Conjecture de Gauss (1792) et Legendre (1798)

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln(x)} \text{ lorsque } x \to +\infty$$

Conjecture de Gauss (1792) et Legendre (1798)

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln(x)} \text{ lorsque } x \to +\infty$$

Théorème des nombres premiers (1896)

$$\frac{\pi(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} \quad \textbf{(TNP)}$$

En particulier, la proportion des nombres premiers est infiniment petite.

Sur les traces d'Euler (1737)

$$\frac{1-r^{N+1}}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N = \sum_{n=0}^{N} r^n$$

Sur les traces d'Euler (1737)

$$\frac{1-r^{N+1}}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N = \sum_{n=0}^{N} r^n$$

$$\text{Si } |r| < 1 \text{ alors } \lim_{N \to +\infty} r^{N+1} = 0 \text{ et}$$

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$$

Sur les traces d'Euler (1737)

En particulier pour $s > 1$:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \dots$$

Sur les traces d'Euler (1737)

En particulier pour $s > 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} &= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{8^s}+\dots \\
\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} &= 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{27^s}+\dots \\
\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} &= 1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{125^s}+\dots \\
\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} &= 1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{49^s}+\frac{1}{343^s}+\dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

Sur les traces d'Euler (1737)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-\frac{1}{2^s}} & = \; 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{8^s}+\dots \\ \dfrac{1}{1-\frac{1}{3^s}} & = \; 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{27^s}+\dots \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}$$

$$= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{12^s}+\frac{1}{16^s}+\dots$$

Sur les traces d'Euler (1737)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{3^s}} & = & 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \\ \dfrac{1}{1-\frac{1}{5^s}} & = & 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \frac{1}{125^s} + \dots \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \dots$$

Théorème du produit d'Euler (1737)

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \times \dots$$

$$= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{10^s}+\dots$$

Plus simplement :

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s>1$$

Théorème du produit d'Euler (1737)

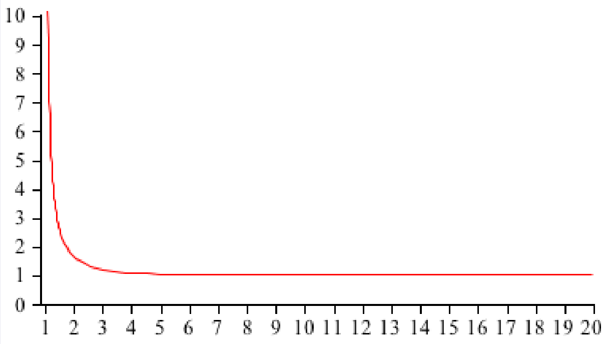
$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s > 1$$

La fonction zêta de Riemann

$$s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s > 1$$

La fonction zêta de Riemann

$$s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s > 1$$



Théorème d'Euclide selon Euler (1737)

$$\lim_{s \to 1^+} \zeta(s) = +\infty \Longrightarrow \text{l'ensemble } \mathcal{P} \text{ est infini}$$

Théorème d'Euclide selon Euler (1737)

$$\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty \Longrightarrow \text{l'ensemble } \mathcal{P} \text{ est infini}$$

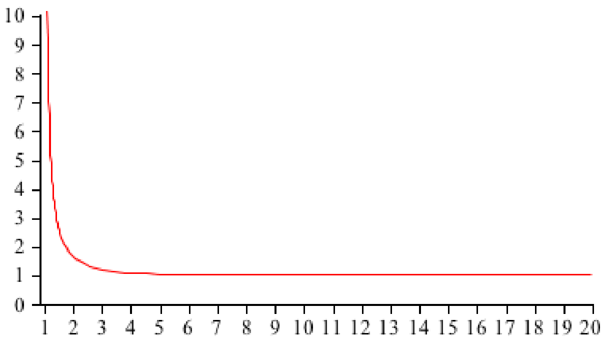
Démonstration

$$\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = \lim_{s\to 1^+} \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

$\square$

La fonction zêta de Riemann

$$s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s > 1$$



La fonction zêta de Riemann

$$s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s > 1$$

où

$$n^s = \exp(\ln(n^s)) = \exp(s \ln(n)) = e^{s \ln(n)}$$

Prolongement de $n^s = e^{s\ln(n)}$

Si $s = a + ib$ est un nombre complexe alors

$$\begin{aligned} n^s &= e^{(a+ib)\ln(n)} \\ &= e^{a\ln(n)+ib\ln(n)} \\ &= e^{a\ln(n)}e^{ib\ln(n)} \end{aligned}$$

Prolongement de $n^s = e^{s\ln(n)}$

Si $s = a + ib$ est un nombre complexe alors

$$
\begin{aligned}
n^s &= e^{(a+ib)\ln(n)} \\
&= e^{a\ln(n)+ib\ln(n)} \\
&= \underbrace{e^{a\ln(n)}}_{r}\,\underbrace{e^{ib\ln(n)}}_{e^{i\theta}} \\
&= re^{i\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\text{où} \quad \begin{cases} r = e^{a\ln(n)} = n^a \\ \theta = b\ln(n) \end{cases}
$$

Prolongement de la fonction zêta de Riemann

$$s \ \mapsto \ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s = a + ib$$

où

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \left|\frac{1}{re^{i\theta}}\right| = \frac{1}{|re^{i\theta}|} = \frac{1}{r} = \frac{1}{n^a}$$

En particulier pour $a > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^s} = 0$

Prolongement de la fonction zêta de Riemann

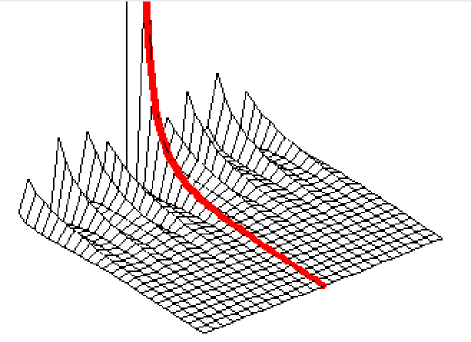
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s = a + ib \text{ et } a > 1 \end{array}$$

Prolongement de la fonction zêta de Riemann

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_+ \\ s & \mapsto & |\zeta(s)| = \left| \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \right| \quad \text{pour } s = a + ib \text{ et } a > 1 \end{array}$$

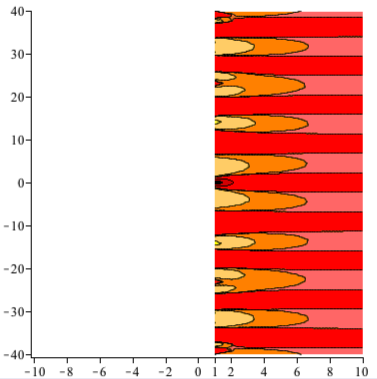
Prolongement de la fonction zêta de Riemann

$$s \mapsto |\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right| \quad \text{pour } s = a + ib \text{ et } a > 1$$



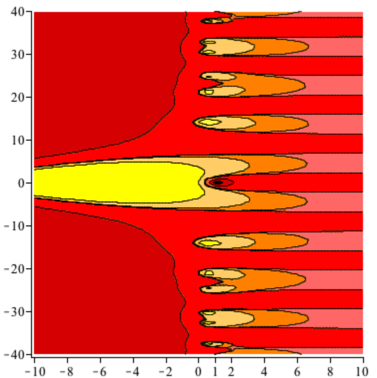
Prolongement de la fonction zêta de Riemann

$$s \;\mapsto\; |\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right| \quad \text{pour } s = a + ib \text{ et } a > 1$$



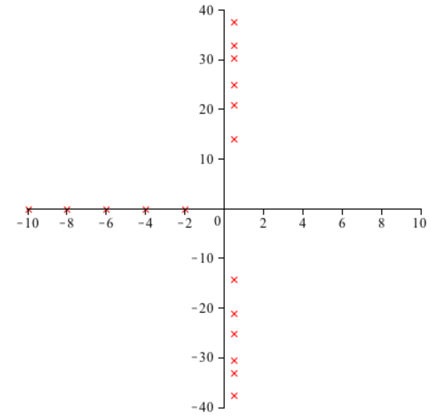
Prolongement de la fonction zêta de Riemann

$$s \mapsto |\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right| \quad \text{pour } s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$$



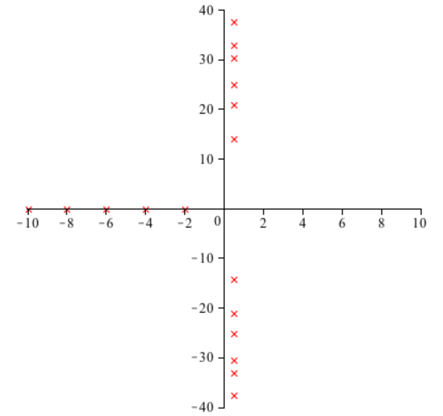
Zéros de la fonction zêta de Riemann

$$\mathcal{Z} = \{s \in \mathbb{C}\backslash\{1\} \text{ tel que } \zeta(s) = 0\}$$



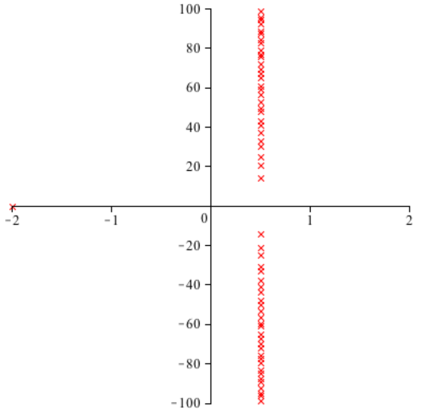
Zéros de la fonction zêta de Riemann

$$\mathcal{Z} = \{-2, -4, -6, \ldots\} \bigcup \mathcal{Z}_+$$



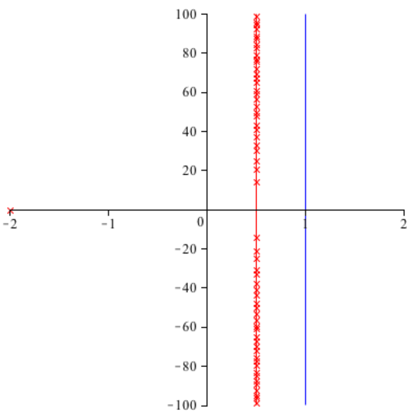
Zéros de la fonction zêta de Riemann

$$\mathcal{Z} = \{-2, -4, -6, \ldots\} \bigcup \mathcal{Z}_+$$



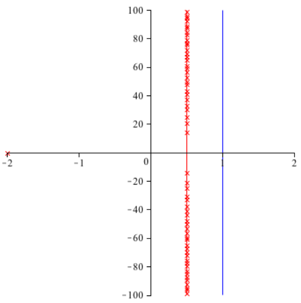
Zéros de la fonction zêta de Riemann

$$\mathcal{Z} = \{-2, -4, -6, \ldots\} \bigcup \mathcal{Z}_+$$



Riemann (1859)

- Si $\mathcal{Z}_+ \bigcap \{x = 1\} = \emptyset$
  alors l'approximation du **(TNP)** est vraie
- Si $\mathcal{Z}_+ \subset \{x = \frac{1}{2}\}$
  alors on peut préciser l'approximation du **(TNP)**



Riemann (1859)

- Si $\mathcal{Z}_+ \bigcap \{x = 1\} = \emptyset$
  alors l'approximation du **(TNP)** est vraie
- Si $\mathcal{Z}_+ \subset \{x = \frac{1}{2}\}$
  alors on peut préciser l'approximation du **(TNP)**

Hadamard et de la Vallée Poussin (1896)

$$\mathcal{Z}_+ \bigcap \{x = 1\} = \emptyset$$

et donc

$$\frac{\pi(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} \quad \textbf{(TNP)}$$

Riemann (1859)

- Si $\mathcal{Z}_+ \bigcap \{x = 1\} = \emptyset$
  alors l'approximation du **(TNP)** est vraie
- Si $\mathcal{Z}_+ \subset \{x = \frac{1}{2}\}$
  alors on peut préciser l'approximation du **(TNP)**

Hypothèse de Riemann (1859)

$$\mathcal{Z}_+ \subset \left\{x = \frac{1}{2}\right\}$$