Ordre ou désordre ?

A la découverte des systèmes dynamiques
et de la théorie du chaos

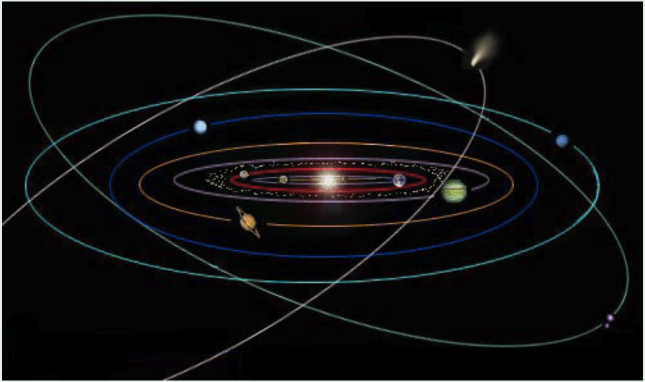
Sébastien Godillon - 10 mai 2012

Le Déterminisme

« Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé seraient présents à ses yeux. »

Pierre-Simon de Laplace (1814)

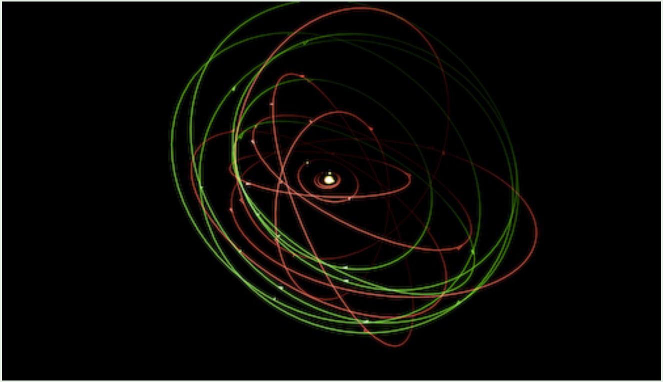
Exemple : la mécanique céleste



- lois de Kepler (1609-1618)
- gravitation de Newton (1687)
- relativité générale d'Einstein (1907-1915)

Exemple : les satellites (naturels) de Saturne

Au moins 62 identifiés dont 53 confirmés.

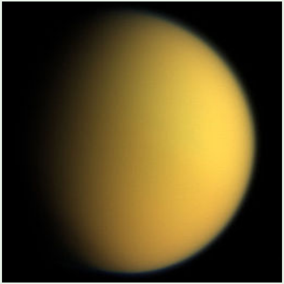


Exemple : les satellites (naturels) de Saturne

Nom	Révolution	Rotation
Titan		
Rhéa		
Japet		
...	...	...
Hypérion		
...	...	...
Phoebé		
...	...	...

Exemple : les satellites (naturels) de Saturne

Nom	Révolution	Rotation
Titan	15,95j	15,95j
Rhéa		
Japet		
...	...	...
Hypérion		
...	...	...
Phoebé		
...	...	...



Exemple : les satellites (naturels) de Saturne

Nom	Révolution	Rotation
Titan	15,95j	15,95j
Rhéa	4,52j	4,52j
Japet		
...	...	...
Hypérion		
...	...	...
Phoebé		
...	...	...

Exemple : les satellites (naturels) de Saturne

Nom	Révolution	Rotation
Titan	15,95j	15,95j
Rhéa	4,52j	4,52j
Japet	79,33j	79,33j
...	...	...
Hypérion		
...	...	...
Phoebé		
...	...	...

Exemple : les satellites (naturels) de Saturne

Nom	Révolution	Rotation
Titan	15,95j	15,95j
Rhéa	4,52j	4,52j
Japet	79,33j	79,33j
...	...	...
Hypérion		
...	...	...
Phoebé	550,31j	0,39j
...	...	...

Exemple : les satellites (naturels) de Saturne

Nom	Révolution	Rotation
Titan	15,95j	15,95j
Rhéa	4,52j	4,52j
Japet	79,33j	79,33j
...	...	...
Hypérion	21,38j	? ?
...	...	...
Phoebé	550,31j	0,39j
...	...	...

Observations de la sonde spatiale Voyager 2 (1981)

La rotation d'Hypérion est « **chaotique** » !!

Observations de la sonde spatiale Voyager 2 (1981)

La rotation d'Hypérion est « **chaotique** » !!

C'est-à-dire :

- fortes perturbations de son axe de rotation
- impossible de prédire son orientation dans l'espace

Mais

- Hypérion est soumis aux mêmes lois de la mécanique céleste,
- les théories de la physique ne sont pas remises en cause.

Mais

- Hypérion est soumis aux mêmes lois de la mécanique céleste,
- les théories de la physique ne sont pas remises en cause.

Principe n° 1

Des lois mathématiques (même très simples) peuvent entraîner des comportements chaotiques. C'est-à-dire :

L'ordre peut engendrer du désordre.

Mais

- Hypérion est soumis aux mêmes lois de la mécanique céleste,
- les théories de la physique ne sont pas remises en cause.

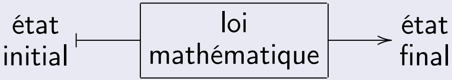
Principe n° 1

Des lois mathématiques (même très simples) peuvent entraîner des comportements chaotiques. C'est-à-dire :

L'ordre peut engendrer du désordre.

fin du XIX^e siècle :	découverte du phénomène par Poincaré
années 1970 :	essor de la **théorie du chaos** (informatique)

Les systèmes dynamiques



Les systèmes dynamiques

$$\text{état initial} \longmapsto \boxed{\begin{array}{c}\text{loi}\\ \text{mathématique}\end{array}} \longrightarrow \text{état final}$$

Etude de l'évolution du système :

$$\text{état } 0 \longmapsto \boxed{\text{loi}} \longrightarrow \text{état } 1 \longmapsto \boxed{\text{loi}} \longrightarrow \text{état } 2 \longmapsto \cdots \longrightarrow \text{état } n$$

Exemples de systèmes dynamiques

- mécanique :
  - mécanique céleste
  - mécanique du solide
  - mécanique des fluides
  - mécanique quantique
  - etc.
- dynamique des populations :
  - démographie
  - biodiversité
  - système proie/prédateur
  - etc.
- météorologie
- etc.

Modèle mathématique (à une variable réelle)

$$\text{état initial} \longmapsto \boxed{\text{loi mathématique}} \longrightarrow \text{état final}$$

Etude de l'évolution du système :

$$\text{état } 0 \longmapsto \boxed{\text{loi}} \longrightarrow \text{état } 1 \longmapsto \boxed{\text{loi}} \longrightarrow \text{état } 2 \longmapsto \cdots \longrightarrow \text{état } n$$

Modèle mathématique (à une variable réelle)

Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ à une variable $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{état initial} \longmapsto \boxed{\text{loi mathématique}} \longrightarrow \text{état final}$$

Etude de l'évolution du système :

$$\text{état } 0 \longmapsto \boxed{\text{loi}} \longrightarrow \text{état } 1 \longmapsto \boxed{\text{loi}} \longrightarrow \text{état } 2 \longmapsto \cdots \longrightarrow \text{état n}$$

Modèle mathématique (à une variable réelle)

Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ à une variable $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c}\text{variable}\\ x\end{array} \longmapsto \boxed{\begin{array}{c}\text{fonction}\\ f\end{array}} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{image}\\ f(x)\end{array}$$

Etude de l'évolution du système :

$$\text{état } 0 \longmapsto \boxed{\text{loi}} \longrightarrow \text{état } 1 \longmapsto \boxed{\text{loi}} \longrightarrow \text{état } 2 \longmapsto \cdots \longrightarrow \text{état } n$$

Modèle mathématique (à une variable réelle)

Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ à une variable $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} \text{variable} \\ x \end{array} \longmapsto \boxed{\begin{array}{c} \text{fonction} \\ f \end{array}} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{image} \\ f(x) \end{array}$$

Etude de l'évolution du système :

$$x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow f(x) \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow f(f(x)) \longmapsto \cdots \longrightarrow f(\ldots f(f(x))\ldots)$$

Modèle mathématique (à une variable réelle)

Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ à une variable $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} \text{variable} \\ x \end{array} \longmapsto \boxed{\begin{array}{c} \text{fonction} \\ f \end{array}} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{image} \\ f(x) \end{array}$$

Etude de l'évolution du système :

$$u_0 \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_1 \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_2 \longmapsto \cdots \longrightarrow u_n = f^{\circ n}(u_0)$$

Etude du comportement d'une suite définie par récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \text{donnée initiale} & : & u_0 = x \in \mathbb{R} \\ \text{pour tout } n \geqslant 0 & : & u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = x$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_1 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_2 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_3 = x \qquad \cdots$$

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = x$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_1 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_2 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_3 = x \qquad \cdots$$

- tout $x \in \mathbb{R}$ est un **point fixe** de f

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = -x$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_1 = -x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_2 = x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_3 = -x \qquad \cdots$$

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = -x$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_1 = -x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_2 = x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_3 = -x \qquad \cdots$$

- $x = 0$ est un **point fixe** de f
- tout $x \neq 0$ est dans un **cycle périodique** de période 2

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = 2x$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_1 = 2x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_2 = 4x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_3 = 8x \quad \cdots$$

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = 2x$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_1 = 2x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_2 = 4x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_3 = 8x \qquad \cdots$$

- $x = 0$ est un **point fixe** de f
- tout $x \neq 0$ donne une suite **divergente**

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{x}{2}$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_1 = \frac{x}{2} \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_2 = \frac{x}{4} \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_3 = \frac{x}{8} \qquad \cdots$$

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{x}{2}$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_1 = \frac{x}{2} \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_2 = \frac{x}{4} \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_3 = \frac{x}{8} \qquad \cdots$$

- $x = 0$ est un **point fixe** de f
- tout $x \neq 0$ est **attiré** par le point fixe 0

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = x^2$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_1 = x^2 \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_2 = x^4 \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow u_3 = x^8 \qquad \cdots$$

Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = x^2$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_1 = x^2 \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_2 = x^4 \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_3 = x^8 \qquad \cdots$$

- $x = 0$ est un **point fixe** de f
- $x = 1$ est un **point fixe** de f
- tout $x \in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$ donne une suite **divergente**
- tout $x \in]-1,+1[$ est **attiré** par le point fixe 0

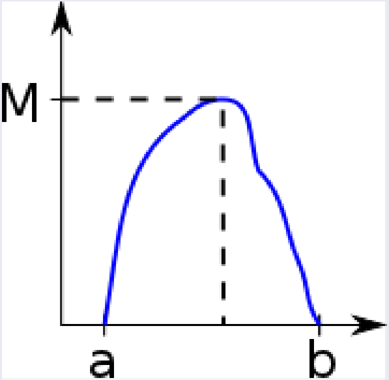
Exemples

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = x^2$

$$u_0 = x \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_1 = x^2 \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_2 = x^4 \longmapsto \boxed{f} \rightarrow u_3 = x^8 \qquad \cdots$$

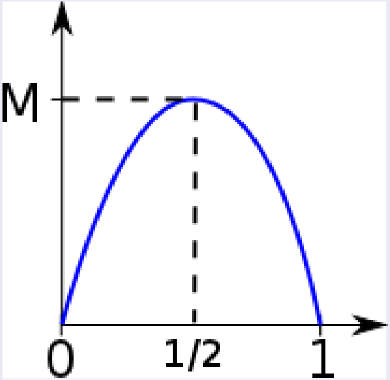
- $x = 0$ est un **point fixe attractif** de f
- $x = 1$ est un **point fixe répulsif** de f
- tout $x \in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$ donne une suite **divergente**
- tout $x \in]-1,+1[$ est **attiré** par le point fixe 0

Fonction unimodale



Exemple de fonction unimodale : la suite logistique

$$f(x) = -4Mx^2 + 4Mx + 0 = 4Mx(1-x)$$



Exemple de fonction unimodale : la suite logistique

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

Etude du système dynamique :

$$\begin{cases} \text{donnée initiale} & : \quad u_0 \in [0,1] \\ \text{pour tout } n \geqslant 0 & : \quad u_{n+1} = f(u_n) = 4Mu_n(1-u_n) \end{cases}$$

Comportement de la suite logistique

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $0 \leqslant M \leqslant 0,25$:

  la suite est attirée par le point fixe attractif 0

Comportement de la suite logistique

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $0 \leqslant M \leqslant 0,25$:
  la suite est attirée par le point fixe attractif 0
- Pour $0,25 \leqslant M \leqslant 0,75$:
  0 est un point fixe répulsif et
  la suite est attirée par un point fixe attractif

Comportement de la suite logistique

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $0 \leqslant M \leqslant 0,25$:
  la suite est attirée par le point fixe attractif 0
- Pour $0,25 \leqslant M \leqslant 0,75$:
  0 est un point fixe répulsif et
  la suite est attirée par un point fixe attractif
- Pour $0,75 \leqslant M$:
  les deux points fixes sont répulsifs et
  la suite semble attirée par un cycle périodique attractif

La cascade de doublement de périodes

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $0 \leqslant M \leqslant 0,75$:
  le cycle attractif est de période 1 (point fixe)

La cascade de doublement de périodes

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $0 \leqslant M \leqslant 0,75$:
  le cycle attractif est de période 1 (point fixe)
- Pour $0,75 \leqslant M \leqslant 0,862$:
  le cycle attractif est de période 2

La cascade de doublement de périodes

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $0 \leqslant M \leqslant 0,75$:
  le cycle attractif est de période 1 (point fixe)
- Pour $0,75 \leqslant M \leqslant 0,862$:
  le cycle attractif est de période 2
- Pour $0,862 \leqslant M \leqslant 0,886$:
  le cycle attractif est de période 4

La cascade de doublement de périodes

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $0 \leqslant M \leqslant 0,75$:
  le cycle attractif est de période 1 (point fixe)
- Pour $0,75 \leqslant M \leqslant 0,862$:
  le cycle attractif est de période 2
- Pour $0,862 \leqslant M \leqslant 0,886$:
  le cycle attractif est de période 4
- Pour $0,886 \leqslant M \leqslant 0,891$:
  le cycle attractif est de période 8

La cascade de doublement de périodes

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $0 \leqslant M \leqslant 0,75$:
  le cycle attractif est de période 1 (point fixe)
- Pour $0,75 \leqslant M \leqslant 0,862$:
  le cycle attractif est de période 2
- Pour $0,862 \leqslant M \leqslant 0,886$:
  le cycle attractif est de période 4
- Pour $0,886 \leqslant M \leqslant 0,891$:
  le cycle attractif est de période 8
- etc.

La cascade de doublement de périodes

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $M_0 = 0 \leqslant M \leqslant M_1 = 0,75$:
  le cycle attractif est de période 1 (point fixe)
- Pour $M_1 = 0,75 \leqslant M \leqslant M_2 \approx 0,862$:
  le cycle attractif est de période 2
- Pour $M_2 \approx 0,862 \leqslant M \leqslant M_3 \approx 0,886$:
  le cycle attractif est de période 4
- Pour $M_3 \approx 0,886 \leqslant M \leqslant M_4 \approx 0,891$:
  le cycle attractif est de période 8
- etc.

La cascade de doublement de périodes

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $M_0 = 0 \leqslant M \leqslant M_1 = 0,75$:
  le cycle attractif est de période 1 (point fixe)
- Pour $M_1 = 0,75 \leqslant M \leqslant M_2 \approx 0,862$:
  le cycle attractif est de période 2
- Pour $M_2 \approx 0,862 \leqslant M \leqslant M_3 \approx 0,886$:
  le cycle attractif est de période 4
- Pour $M_3 \approx 0,886 \leqslant M \leqslant M_4 \approx 0,891$:
  le cycle attractif est de période 8
- etc.

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = M_\infty \approx 0.892486\ldots$$

Comportement chaotique

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $M = M_\infty \approx 0,892486\dots$:

  la suite a un comportement « **chaotique** » !!

Comportement chaotique

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $M = M_\infty \approx 0,892486\ldots$:

  la suite a un comportement « **chaotique** » !!
- Pour $M \geqslant M_\infty \approx 0,892486\ldots$? ?

Comportement chaotique

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $M = M_\infty \approx 0,892486\dots$:
  la suite a un comportement « **chaotique** » !!
- Pour $M \geqslant M_\infty \approx 0,892486\dots$:
  - soit un cycle attractif
  - soit un comportement chaotique

Comportement chaotique

$$f : x \longmapsto f(x) = 4Mx(1-x)$$

- Pour $M = M_\infty \approx 0,892486\ldots$:
  la suite a un comportement « **chaotique** » !!
- Pour $M \geqslant M_\infty \approx 0,892486\ldots$:
  - soit un cycle attractif
  - soit un comportement chaotique
- En particulier pour $M = 1$:
  la suite a un comportement chaotique
  (forte sensibilité aux conditions initiales)

Diagramme de bifurcation

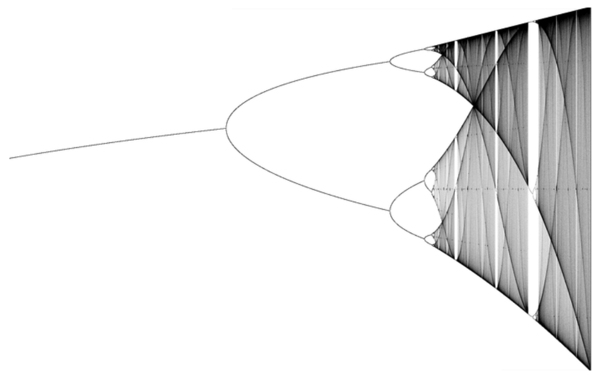
En abscisse : le paramètre M

En ordonnée : les points du cycle attractif de f

Diagramme de bifurcation

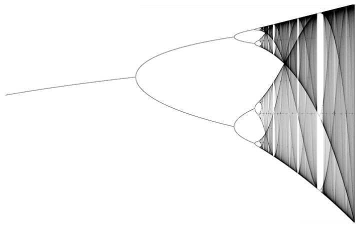
En abscisse : le paramètre M

En ordonnée : les points du cycle attractif de f



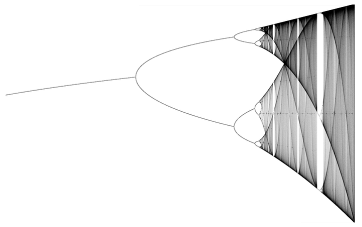
Universalité du figuier (Feigenbaum 1975)

Toutes les systèmes dynamiques issus d'une fonction unimodale ont un diagramme de bifurcation « similaire ».



Universalité du figuier (Feigenbaum 1975)

Toutes les systèmes dynamiques issus d'une fonction unimodale ont un diagramme de bifurcation « similaire ».



Par exemple :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+2}-M_{n+1}} = \delta \approx 4,669202\ldots$$

Principe n° 1

L'ordre peut engendrer du désordre.

Principe n° 1

L'ordre peut engendrer du désordre.

Principe n° 2

Le désordre est régi par l'ordre.