

Sujets de MATH.en.JEANS 2007/2008

1 La guirlande de Noël

1.1 Présentation

La légende raconte qu'il y a bien longtemps, en Allemagne, une maman s'affairait pour Noël. Pour ce faire, elle avait dressé le sapin, briqué sa maison et chassé les araignées à grands coups de balai. Effrayées, celles-ci étaient parties se réfugier au grenier. Le calme et la sérénité revenus, hardiment, les araignées redescendirent et découvrirent le sapin. Elles trouvèrent l'arbre si joli, qu'elles en entreprirent l'assaut le couvrant de leurs toiles grises et poussiéreuses.

Quand le Père Noël arriva un peu plus tard pour distribuer les cadeaux, il fut ravi de découvrir nos araignées heureuses, pleinement satisfaites de leur savant maillage mais il pensa aussi à la tristesse de la maman qui allait retrouver son arbre enveloppé de toile grise. Du coup, pour satisfaire tout le monde et parce qu'il était aussi un peu magicien, le Père Noël transforma les fils grisâtres en fils d'or et d'argent. L'arbre se mit alors à scintiller et à briller de tous ses feux ! Il était devenu magnifique.

C'est pour cette raison que depuis, nous couvrons les sapins de belles et brillantes guirlandes.

Le but de ce sujet est l'étude d'une guirlande électrique clignotante.



FIGURE 1 – Exemple de guirlande électrique

1.2 Énoncé

On dispose d'une longue guirlande horizontale d'ampoules clignotantes. Son fonctionnement est décrit par les règles suivantes :

1. Dès que l'on branche la guirlande, l'ampoule à l'extrémité gauche s'allume alors que toutes les autres ampoules sont éteintes.
2. L'ampoule à l'extrémité gauche restera toujours allumée.
3. Si une ampoule est allumée à un instant donné, alors l'ampoule située à sa droite clignotera (s'allumera si elle était éteinte ou s'éteindra si elle était allumée) à la seconde suivante.
4. Par contre, si une ampoule est éteinte, alors l'ampoule située à sa droite ne clignotera pas (restera allumée si elle était allumée ou restera éteinte si elle était éteinte) à la seconde suivante.

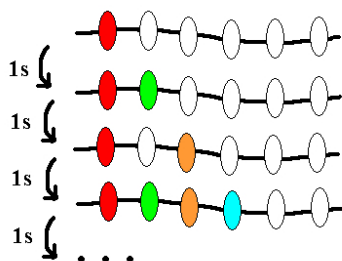


FIGURE 2 – Schématisation de la guirlande

Questions :

- Après avoir branché la guirlande, combien doit-on attendre de secondes pour voir la 42^{ème} ampoule s'allumer ?
- Combien y a-t-il d'ampoules allumées au bout de 10 secondes ? Au bout de 100 secondes ? Au bout de 1000 secondes ?
- Après une heure de fonctionnement, combien de temps a été allumée la 24^{ème} ampoule ?

1.3 Ouvertures possibles

- Toutes les configurations d'ampoules allumées ou éteintes sont-elles possibles ?
- Que se passe-t-il si on change les règles de fonctionnement de la guirlande ?

1.4 Enjeux

La guirlande électrique est un exemple de système dynamique : les règles d'évolution sont connues et on doit prévoir ce qu'il va se passer à partir d'une situation donnée. Les systèmes dynamiques forment une branche très active en recherche mathématique. Ils apparaissent dans un grand nombre de contextes : prévision météorologique, évolutions des populations, économie boursière, etc...

De plus, l'étude de ces systèmes a permis l'apparition de nombreuses idées mathématiques intéressantes comme la théorie du chaos ou les fractales.

2 Calculer avec une règle et un compas

2.1 Présentation

Euclide a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné.

La géométrie euclidienne est la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas. L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être construit à l'aide de ces deux instruments.

Le sujet propose de développer et de cataloguer des méthodes pour calculer avec une règle non graduée et un compas. Le but étant de montrer qu'on peut se passer d'une calculatrice pour effectuer certains calculs même compliqués.

2.2 Énoncé

A partir d'un segment de longueur 1, on peut construire un segment de longueur 2 à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas. On peut par exemple utiliser la méthode suivante :

Recette 1 On appelle $[MN]$ le segment de départ.

1. Tracer la droite (MN) en utilisant la règle.
2. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre N et de rayon MN à l'aide du compas.
3. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe la droite (MN) au point M et en un autre point appelé R .

On obtient le segment $[MR]$.

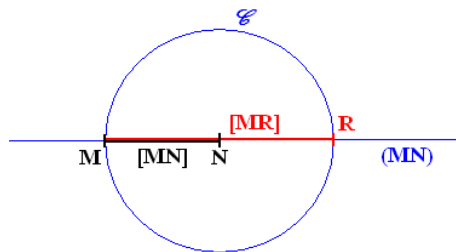


FIGURE 3 – Recette n°1

Si le segment $[MN]$ est de longueur 1, alors le segment $[MR]$ est bien de longueur 2.

En fait, cette méthode permet de multiplier par 2 la longueur de n'importe quel segment. Ainsi, si on la réutilise sur le segment obtenu, on obtiendra un nouveau segment de longueur 4, puis un segment de longueur 8, etc...

On peut également concevoir une méthode permettant d'additionner les longueurs de deux segments :

Recette 2 On appelle $[MN]$ et $[RS]$ les segments de départ avec MN plus petit que RS (vérifié avec le compas).

1. Tracer la demi-droite $[MN)$ en utilisant la règle.
2. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre N et de rayon RS à l'aide du compas.
3. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe la demi-droite $[MN)$ en un point appelé T .

On obtient le segment $[MT]$.

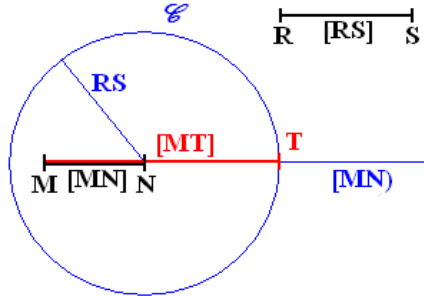


FIGURE 4 – Recette n°2

La longueur du segment $[MT]$ obtenu est bien la somme des longueurs des segments $[MN]$ et $[RS]$.

En partant d'un segment de longueur 1, on peut construire un segment de longueur 2 en utilisant la recette 1. Puis à l'aide de la recette 2 et de ces deux segments, on peut obtenir un segment de longueur $1+2=3$.

Finalement, avec un seul segment de longueur 1 on peut construire des segments de longueur 2, 3, 4, 8, etc...

Questions :

- Peut-on écrire une autre recette pour diviser par 2 la longueur de n'importe quel segment ? Pour multiplier par 3 ? Pour diviser par 3 ?
- Peut-on écrire une autre recette pour soustraire les longueurs de deux segments ? Pour les multiplier ? Pour les diviser ?
- Existe-t-il d'autres opérations réalisables à la règle et au compas ?
- A partir d'un seul segment de longueur 1, quels sont toutes les longueurs réalisables à l'aide de toutes ces recettes ?

2.3 Ouvertures possibles

- L'intuition d'Euclide était-elle bonne ? Si non, existe-t-il un exemple simple de nombre qui ne peut pas être construit à l'aide d'une règle et d'un compas ?
- Pour chaque nombre qui peut être construit à l'aide d'une règle et d'un compas, peut-on trouver la méthode la plus rapide (avec le moins de constructions possibles) pour l'obtenir ?
- Que se passe-t-il si au lieu de s'intéresser aux longueurs de segments on étudie les mesures d'angles ?

2.4 Enjeux

Les nombres qui peuvent être construits à l'aide d'une règle et d'un compas fascinent les mathématiciens depuis les origines de la géométrie à l'époque de la Grèce antique. Très tôt, ces nombres ont soulevé des problèmes intéressants qui ont permis l'élaboration de nouvelles branches des mathématiques. Il a fallu attendre plusieurs siècles de développement de l'algèbre pour que ces problèmes trouvent enfin des solutions, mais certains d'entre eux résistent encore aux chercheurs actuels.

En plus des mathématiques, ces nombres et ces constructions à la règle et au compas apparaissent en architecture et dans le monde artistique : iconographie, typographie, peinture de la Renaissance, cubisme, art abstrait, etc...

3 Les lacets de chaussures

3.1 Présentation

Arrivé à Gordion, l'antique cité du roi Midas, durant l'hiver 334 av. J.-C., Alexandre le Grand se rend au temple pour honorer les dieux de la ville. Les prêtres lui montrent alors un char qui aurait appartenu à Gordias, père de Midas, roi éponyme de la ville. Le timon et le joug sont encore liés par un nœud fort complexe, au sujet duquel le grand prêtre raconte que, selon un oracle antique, celui qui parviendrait à le dénouer serait maître de toute l'Asie. Relevant le défi, Alexandre cherche vainement à délier le nœud jusqu'à ce que, à bout de patience, il dégaine son épée et tranche le nœud gordien passé depuis à la légende.

Aujourd'hui, l'expression "nœud gordien" s'applique à un problème apparemment insoluble qui requiert une solution originale et audacieuse.

Le but de ce sujet est de dénombrer les différentes façons possibles de lacer ses chaussures.

3.2 Énoncé

Pour représenter facilement un laçage de chaussures on dispose deux colonnes d'un nombre fixé d'oeillets que l'on relie avec des arêtes en respectant les règles suivantes :

1. Chaque oeillet est l'extrémité de deux arêtes.
2. Au moins une des deux arêtes aboutissant à un oeillet n'est pas verticale.

Dans ce schéma, on ne fait pas de distinction entre le lacet du "dessus" et le lacet du "dessous".

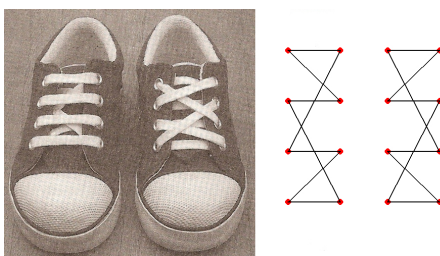


FIGURE 5 – Exemples de lacets "étoilés" et leur représentation

Parmi toutes les différentes façons de lacer ses chaussures, on peut caractériser certaines familles comme par exemple :

- les lacets entremêlés qui ne contiennent pas d'arêtes verticales (voir la figure 5 ou le laçage de gauche de la figure 7) ;
- les lacets serrés qui contiennent toutes les arêtes horizontales (voir les figures 5 et 6) ;
- etc...

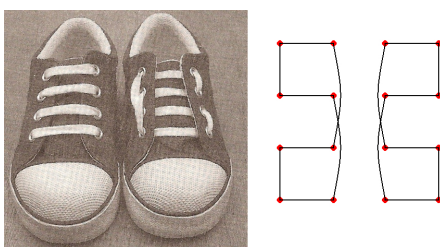


FIGURE 6 – Exemples de lacets "en serpents" et leur représentation

Questions :

- De combien de façons possibles peut-on lacer une chaussure à 6 oeillets ? A 8 oeillets ? A 10 oeillets ?
- Combien existe-t-il de laçages entremêlés différents ? Et pour les laçages serrés ?
- Quelles sont les méthodes qui permettent de dénombrer rapidement et facilement ?
- Peut-on trouver d'autres familles de laçages intéressantes ?

3.3 Ouvertures possibles

- Comment lacer ses chaussures en utilisant une longueur de lacet minimale ? Combien existe-t-il de laçages de ce type ?
- Comment lacer ses chaussures de la façon la plus résistante possible ?

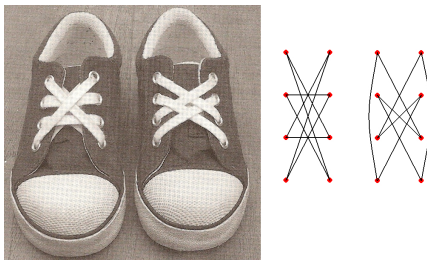


FIGURE 7 – Exemples de lacets "du démon ou de l'ange" et leur représentation

3.4 Enjeux

Les problèmes de dénombrement sont nombreux en mathématiques. Depuis toujours, l'Homme essaye de compter ce qui l'entoure et cherche des méthodes simples pour y parvenir plus rapidement. Les raisonnements utilisés en combinatoire, branche des mathématiques étudiant les méthodes de dénombrement, sont souvent remarquables de simplicité et d'élégance. Ils ont des conséquences aussi bien en théorie des nombres qu'en probabilité.

Les mathématiciens actuels s'intéressent beaucoup aux lacets de chaussures. Domaines en plein développement, la théorie des nœuds et celle des tresses ont des applications importantes en physique (électromagnétisme), en biologie ou en chimie.

4 Le découpage du brownie

4.1 Présentation

Le brownie tire vraisemblablement son nom de sa couleur marron (brown en anglais). Mais parmi les versions qui tentent d'élucider le mystère de l'origine des brownies, on peut retenir l'histoire d'une bibliothécaire américaine nommée Bronie Schrumpf. Alors qu'elle préparait un gâteau au chocolat, elle oublia d'y incorporer le beurre ; son gâteau est donc resté plat. Elle ne se démonta pas et le coupa en petits carrés, inventant ainsi ce succulent dessert chocolaté.

Afin de vendre des brownies de différentes tailles, le pâtissier confectionne tout d'abord un grand gâteau au chocolat rectangulaire dans lequel il découpe ensuite les célèbres desserts carrés. Le sujet propose d'étudier ce découpage.



FIGURE 8 – Un gâteau rectangulaire avant son découpage en brownies

4.2 Énoncé

Pour découper son grand gâteau au chocolat, le pâtissier cherche toujours à faire les plus grands brownies carrés possibles. Voici comment il procède avec l'exemple d'un gâteau de 55 cm de long et 20 cm de large :

- A** - Il découpe un premier brownie de 20 cm de côté. Il lui reste donc un gâteau rectangulaire de 35 cm sur 20 cm dans lequel il peut découper un second brownie de 20 cm de côté. Il reste alors un gâteau rectangulaire de 20 cm sur 15 cm.
- B** - Puis, il découpe un brownie plus petit de 15 cm de côté. Le gâteau restant ne fait plus que 15 cm sur 5 cm.
- C** - Enfin, il découpe trois petits brownies de 5 cm de côté.

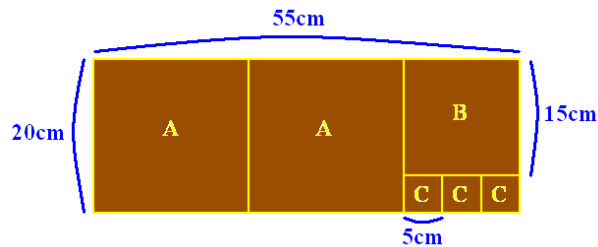


FIGURE 9 – Le découpage des brownies

Avec ce gâteau au chocolat, le pâtissier a donc obtenu six brownies qu’il pourra mettre en vente :

- A** - Deux brownies de taille familiale de 20 cm de côté.
- B** - Un brownie de taille moyenne de 15 cm de côté.
- C** - Et trois brownies de taille individuelle de 5 cm de côté.

En résumé, les nombres de brownies sont 2, 1, 3 dans l’ordre décroissant des tailles.

Questions :

- Qu’obtient le pâtissier avec un gâteau au chocolat de dimensions différentes ?
- Deux gâteaux au chocolat de dimensions différentes peuvent-ils donner les mêmes nombres de brownies ?
- Peut-on deviner les nombres de brownies de tailles différentes à partir des dimensions du gâteau au chocolat avant son découpage ?

4.3 Ouvertures possibles

- Peut-on retrouver les dimensions du gâteau au chocolat en observant les nombres de brownies dans la vitrine de la pâtisserie ?
- Le pâtissier est-il sûr que son découpage s’arrête avec n’importe quel gâteau au chocolat ? Si non, existe-t-il un exemple simple de dimensions de gâteau au chocolat pour lequel le découpage ne s’arrête jamais ?

4.4 Enjeux

Sans le savoir, le pâtissier, en découpant ses brownies, utilise une notion importante des mathématiques : les fractions continues. On peut trouver la première trace de leur utilisation en Inde au VI^{ème} siècle pour la résolution de certaines équations. Depuis, elles aident régulièrement les mathématiciens, notamment en analyse et en théorie des nombres.

Elles sont également à l’origine de la construction des horloges astronomiques, mais on les retrouve aussi en cryptographie, dans la fabrication d’un CD ou dans la compression des données numériques.