Sujets de MATh.en.JEANS 2006/2007

1 Le jeu agité de la coopération

1.1 Présentation

Les comportements sociaux sont réputés pour leur diversité et leur complexité. L'entraide ou la trahison sont des pratiques courantes et leurs efficacités sur le long terme semblent imprévisibles.

Le but de ce sujet est de donner un apercu de la richesse de ces stratégies à l'aide d'une simulation aux règles simplifiées : le jeu de la coopération.

1.2 Énoncé

Le jeu oppose un sabotier et un paysan qui ont besoin tous les deux de sabots et de blé. Leur intérêt commun est de se spécialiser et de créer une association. Globalement, ils gagneront chacun, en coopérant ainsi, plus que si l'un refuse de commercer avec l'autre. En effet, si l'un de ces hommes ne coopère pas, il sera obligé de passer une partie de son temps à faire une tâche dans laquelle il est inefficace.

Mais ils peuvent aussi être tenté de voler leur voisin. Ils en tireront un bénéfice immédiat, mais perdront du temps dans la production de leur activité. Et bien sûr, cette stratégie devient quasiment inefficace s'ils décident de se voler l'un à l'autre en même temps.

Si les deux hommes coopèrent, ce que l'on notera [c,c], tous deux gagnent journellement 3 points, et la production quotidienne globale est de 6 points.

Si l'un trahit et l'autre coopère, [t,c], celui qui trahit et exploite son adversaire gagne 5, et l'autre, qui se fait berner, rien du tout. La production quotidienne est cinq points au lieu de six : un voleur fait baisser la production générale.

Si les deux hommes trahissent simultanément, [t,t], cela leur coûte du temps et de l'énergie et, de plus, ils perdent le bénéfice des échanges de compétence. On convient qu'alors ils ne gagnent chacun que 1 point par jour.

FIGURE 1 – Un paysan et un sabotier

Voici par exemple ce que donne un combat sur une durée de dix jours entre un joueur "gentil" qui décide de coopérer chaque jour, et un joueur "lunatique" qui opte pour une stratégie un peu plus complexe : il commence par coopérer, puis trahit un jour sur deux.

Numéro du jour	Joueur gentil	Joueur lunatique
1	c	c
2	c	t
3	c	c
4	c	t
5	c	c
6	c	t
7	c	c
8	c	t
9	c	c
10	c	t

Ce qui donne le tableau de gains suivants :

Numéro du jour	Joueur gentil	Joueur lunatique
1	3	3
2	0	5
3	3	3
4	0	5
5	3	3
6	0	5
7	3	3
8	0	5
9	3	3
10	0	5
Total	15	40

Questions :

- Peut-on prévoir le gagnant d'un combat avec seulement la donnée des stratégies de chaque joueur ?
- Que se passe-t-il si on augmente le nombre de jours de la durée du combat ?
- Existe-t-il une stratégie "optimale" qui permet de gagner à coup sûr contre n'importe quel type de joueur ?

1.3 Ouvertures possibles

- Comment procéder pour organiser un combat avec plus de deux stratégies ?
- Quelles conclusions peut-on tirer de ces simulations ?

1.4 Enjeux

Ce type de situation apparaît dans un grand nombre de contextes : en économie, en biologie, en sciences politiques, en psychologie, en sociologie, en stratégie militaire, en informatique, etc...

La diversité des stratégies observées, et les résultats inattendus obtenus témoignent de la complexité des systèmes coopératifs. Les chercheurs continuent de s'intéresser au jeu de la coopération et à ses variantes plus complexes qui permettent un début de compréhension de ce type de situation.

2 Système monétaire

2.1 Présentation

Notre système monétaire présente différents types de pièces pour qu'il soit toujours possible de payer en liquide n'importe quel montant.

Peut-on envisager un système plus économique avec moins de pièces ? Cette question est l'objet de ce sujet.

2.2 Énoncé

Supposons que le système monétaire ne comporte que des pièces de 5 €et 7 €. Pour certains montants, il est assez facile de bien s'organiser pour les payer.

Par exemple, pour un objet à 12 €, il suffit de donner 1 pièce de chaque montant. Ou encore, pour un objet à 2 €, il suffit de donner 1 pièce de 7 €, et le commerçant nous rend 1 pièce de 5 €.

Mais le problème devient beaucoup plus complexe pour d'autres montants.

Par exemple, pour un objet à 1 €, il faut donner 3 pièces de 7 €, alors que le commerçant nous rend 4 pièces de 5 €.

Figure 2 – Les différentes pièces d'euros

Questions :

- Est-il possible de payer n'importe quel montant avec ce système de pièces de 5 €et 7 € ?

– Peut-on remplacer 5 €et 7 €par n'importe quelles autres valeurs ?

2.3 Ouvertures possibles

– Que se passe-t-il si le commerçant ne rend plus la monnaie ?
– Que se passe-t-il avec 3 valeurs de pièces différentes ? 4 valeurs de pièces différentes ? etc...
– Comment trouver un système qui minimalise le nombre de pièces utilisées pour chaque achat ?

2.4 Enjeux

Ce problème a ses origines dans l'antiquité : les marchands utilisant des balances à plateaux avaient besoin de connaître les types de poids étalons les plus avantageux à utiliser pour s'encombrer le moins possible lors de leurs voyages.

Il est encore d'actualité, puisque les informaticiens sont souvent confrontés à ce genre de problème pour pouvoir traiter le maximum de données avec un minimum d'éléments similaires qu'on peut combiner entre eux.

3 Des carrés dans les rectangles

3.1 Présentation

Un rectangle a deux dimensions : sa hauteur et sa largeur. Et la proportion *largeur/hauteur* donne la forme du rectangle. Par exemple, un écran 16/9 est un écran rectangulaire dont la proportion *largeur/hauteur* est égale à 16/9. Ces écrans peuvent être grands ou petits, mais ils ont tous la même forme. A tout nombre positif correspond une forme de rectangles.

Le sujet propose d'étudier une autre façon de donner la forme d'un rectangle à l'aide d'une méthode géométrique.

3.2 Énoncé

Le but du jeu est de découper l'aire du rectangle en différents carrés à l'aide de découpages successifs.

Prenons un exemple : on décompose un rectangle 16/9 (c'est à dire de longueur 16 et de largeur 9) en différents carrés.

– Le premier carré est coupé dans la longueur initiale (de 16) du rectangle, il est de 9 sur 9.

- Il reste un rectangle de longueur 9 et de largeur 7, on découpe un carré dans la nouvelle longueur, il sera de 7 sur 7.
- Ensuite, on obtient un nouveau rectangle de longueur 7 et de largeur 2. On refait des découpages pour avoir 3 carrés de 2 sur 2.
- Enfin avec un dernier découpage, on obtient 2 carrés de 1 sur 1.

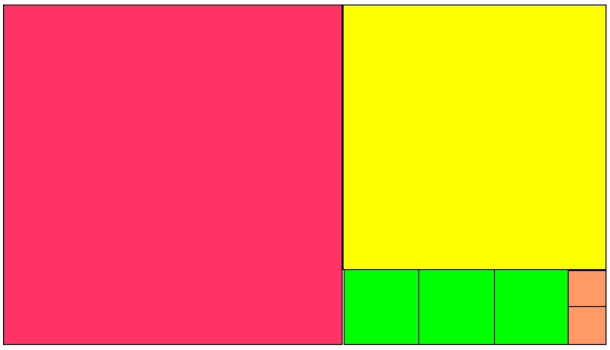

FIGURE 3 – Figure obtenue après découpages

Le code obtenu est alors : **1-1-3-2**, car on peut placer :
- **1** seul carré dans la longueur initiale,
- puis **1** seul dans la largeur initiale (la longueur du rectangle restant),
- ensuite on peut en placer **3** dans la largeur du second rectangle obtenu (la longueur du rectangle restant),
- et **2** dans la longueur du dernier rectangle.

L'espace est totalement occupé, le codage est donc fini.

Questions :
- Comment trouver le code quand on a la fraction de départ ?
- Comment retrouver les proportions des rectangles à partir de leurs codages ?

3.3 Ouvertures possibles

- Comment comparer deux nombres si je connais leurs codages ?
- Si on part de n'importe quelle forme, est-on sûr que le découpage s'arrête ?
- Que se passe t'il dans le cas d'une feuille de papier au format A4 (210mm x 297mm environ, mais la proportion exacte est racine de 2 qui est aussi le rapport de la diagonale du carré à son côté) ?

3.4 Enjeux

Le sujet introduit de manière géométrique le concept de fractions continues qui a une place importante en mathématiques. Il permet de représenter les nombres d'une autre façon que leur écriture décimale, afin d'en dégager de nouvelles propriétés.

Cette notion est en particulier très utilisée par les chercheurs qui étudient les problèmes complexes posés par les équations diophantiennes : ce sont les équations à coefficients entiers dont on cherche des solutions entières.

4 Les pièces du Tetris

4.1 Présentation

Tetris est un jeu de puzzle très populaire. Le but est d'empiler des pièces le plus judicieusement possible afin de former des lignes.

Les pièces du Tetris sont formés avec 4 petits carrés de même taille. Il en existe 7 différentes.

Ce sujet a pour but de dénombrer les nombres de pièces de Tetris réalisables si on utilise 5 ou plus petits carrés de même taille.

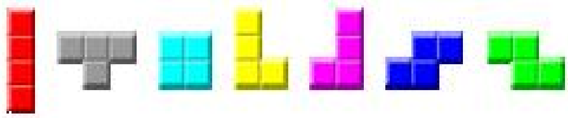

FIGURE 4 – Les pièces du Tetris

4.2 Énoncé

Le domino est composé de 2 carrés accolés par un côté. Les polyominos qui en réunissent 3 sont dénommés triominos ; 4, tetrominos ; 5, pentaminos ; 6, hexaminos ; 7,heptaminos ; 8,octaminos ; etc...

Questions :

- Combien existe-t-il d'hexaminos ? d'heptaminos ? d'octaminos ?
- Peut-on trouver une formule qui donne le nombre de polyominos en fonction du nombre de carrés utilisés pour les fabriquer ?

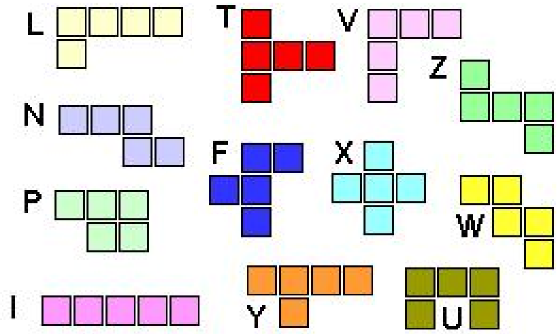

Figure 5 – Les pentaminos

4.3 Ouvertures possibles

- Est-il possible de paver un rectangle avec tous les pentaminos ?
- Comment paver un rectangle avec des exemplaire d'un même polyominos ?
- Que se passe-t-il si on remplace les petits carrés initiaux par des triangles équilatéraux ?

4.4 Enjeux

En plus de l'intérêt ludique des polyominos, de nombreux mathématiciens les étudient. Les questions simples qu'ils soulèvent amènent souvent à des raisonnements riches et intéressants.

Leurs études intéressent également les spécialistes de cristallographie qui retrouvent ces formes dans certains arrangements spatiaux d'atomes.

5 Une variante du jeu de l'awalé

5.1 Présentation

L'awalé est un jeu de société d'origine africaine. C'est le plus répandu des jeux de type "compter et capturer" dans lesquels on distribue des cailloux, graines ou coquillages dans des coupelles ou des trous.

Le but de ce sujet, est d'étudier une variante en solitaire, pour appréhender la richesse des mécanismes de ce jeu.

FIGURE 6 – Un jeu d'awalé

5.2 Énoncé

On dispose d'un plateau contenant des trous numérotés de 1 à 10. On place des graines dans ces trous.

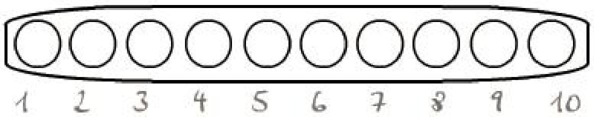

FIGURE 7 – Le plateau de jeu

Un "coup" consiste à vider un trou de toutes ses graines en respectant la règle suivante : un trou ne peut être vidé que s'il contient un nombre de graines égal à son numéro. Puis on répartit ses graines à raison d'une dans chacun des trous situés à gauche du trou de départ, et on retire la graine restante du jeu.

La partie est gagnée si toutes les graines ont pu être écartées du jeu.

Pour certaines positions de départ, il est assez facile de trouver la combinaison gagnante.

Par exemple avec 1 graine dans le trou n°2, et 3 graines dans le trou n°3, il suffit de jouer la suite de coups suivante :

- On commence par le trou n°3 (c'est possible car il contient 3 graines). On se retrouve alors avec 1 graine dans le trou n°1, 2 graines dans le trou n°2 et 1 graine écartée du jeu.
- Ensuite on joue le trou n°1 (c'est possible car il contient 1 graine) en retirant la graine du jeu.

– Puis on joue le trou n°2 (c'est possible car il contient 2 graines). On se retrouve alors avec 1 graine dans le trou n°1 et 3 graines écartées du jeu.
– Enfin, on finit en retirant du jeu la graine du trou n°1.

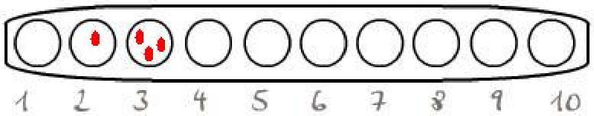

FIGURE 8 – Une position de départ gagnante

Questions :
– Est-ce que toutes les parties sont gagnantes quelle soit la position de départ ?
– Si oui, existe-t-il une stratégie qui permet de trouver la combinaison gagnante pour chaque position de départ ?
– Mais si non, comment savoir à partir d'une position de départ, s'il est possible de gagner la partie ?

5.3 Ouvertures possibles

– Combien de graines au minimum doit-on utiliser pour construire une position de départ gagnante et tel que le trou n°10 soit non vide ?
– Même question avec la case n°11 (en prenant un plateau plus grand) ? la case n°12 ? etc...

5.4 Enjeux

L'étude du jeu d'awalé est une des nombreuses branches de la théorie des jeux qui trouvent de nombreuses applications en économie, en sciences politiques ou en stratégie militaire.

En particulier, les économistes suivent de près ces études pour élaborer des stratégies rationnelles dans des situations où les gains d'un acteur dépendent non seulement de son comportement et des conditions de marché, mais aussi de celui des autres intervenants.

6 Tous les chemins mènent à Rome

6.1 Présentation

De nos jours, les réseaux sont présents un peu partout (relais d'antennes téléphoniques, internet, réseau routier...) et la résolution des problèmes qu'ils engendrent est donc essentielle.

Dans ce sujet, il est proposé de calculer le nombre de chemins reliant deux points d'une structure donnée.

Figure 9 – Le réseau urbain d'un quartier de New-York

6.2 Énoncé

On considère un réseau carré. Un marcheur évolue dans ce quadrillage en ne faisant que des pas de longueur une arête du réseau, vers la droite ou vers le haut.

Questions :

– Combien de chemins pourra-t-il emprunter en partant de A pour se rendre en B ?
– Peut-on trouver une formule qui donne ce nombre de chemins en fonction de la position des points A et B ?

6.3 Ouvertures possibles

– Que se passe-t-il si on le marcheur peut aussi aller vers la gauche et vers le bas ?

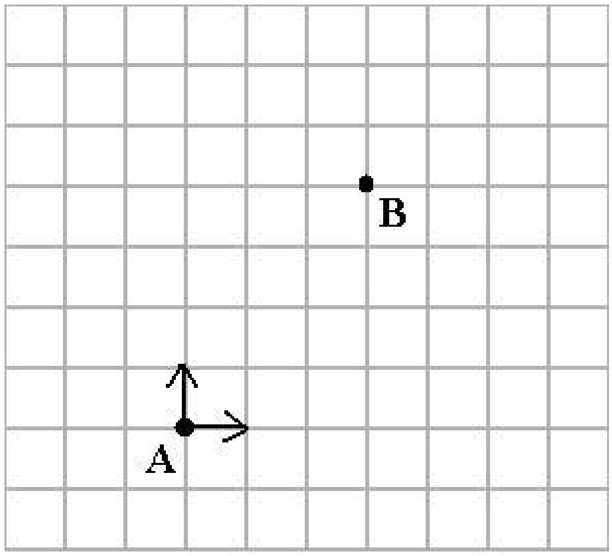

FIGURE 10 – Un réseau carré

- Comment faire s'il existe des "obstacles" entre les points A et B ?
- Que se passe-t-il dans le cas d'un réseau triangulaire ? d'un réseau cubique ?

6.4 Enjeux

Les réseaux ont de nombreuses applications en mathématiques pures, tout particulièrement en théorie des nombres. Ils apparaissent également en mathématiques appliquées et dans la résolution de problèmes informatiques, en cryptographie notamment. Leur structure discrète en fait un outil informatique et un objet d'études algorithmiques à part entière.

Ils sont utilisés dans différents domaines de la physique, par exemple : en optique, en anatomie, en électrotechnique, en électronique, ou encore en sciences des matériaux où les réseaux de dimension 3 permettent de modéliser la répartitions d'atomes ou de molécules dans un cristal.