# Formulaire de développements limités

## La formule de Taylor-Young

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ avec $f$ dérivable $n$ fois sur $I$ et $f^{(n)}$ continue sur $I$. On considère $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors pour $h$ au voisinage de 0 on a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1} + h^{n+1}\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon$ est une fonction continue au voisinage de 0 vérifiant $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

## Les indispensables

Tous les développements limités présentés sont au voisinage de 0.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2k+1}\varepsilon(x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2k}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

## Les pratiques

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(c) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(c) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\times 4}x^2 + \frac{3}{2\times 4\times 6}x^3 - \frac{3\times 5}{2\times 4\times 6\times 8}x^4 + \dots \\
&\quad \cdots + (-1)^{n+1}\frac{3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times\cdots\times(2n)}x^n + x^n\varepsilon(x) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2\times 4}x^2 - \frac{3\times 5}{2\times 4\times 6}x^3 + \frac{3\times 5\times 7}{2\times 4\times 6\times 8}x^4 + \dots \\
&\quad \cdots + (-1)^n\frac{3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times\cdots\times(2n)}x^n + x^n\varepsilon(x) \\
\tan(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^4 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + x^9\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

## Les folkloriques

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arcsin}(x) &= x + \frac{1}{2\times 3}x^3 + \frac{3}{2\times 4\times 5}x^5 + \frac{3\times 5}{2\times 4\times 6\times 7}x^7 + \frac{3\times 5\times 7}{2\times 4\times 6\times 8\times 9}x^9 + \dots \\
&\quad \dots + \frac{3\times\cdots\times(2k-1)}{2\times\cdots\times(2k)\times(2k+1)}x^{2k+1} + x^{2k+1}\varepsilon(x) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2k+1}\varepsilon(x) \\
\sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2k+1}\varepsilon(x) \\
\cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2k}\varepsilon(x) \\
\operatorname{argsh}(x) &= x - \frac{1}{2\times 3}x^3 + \frac{3}{2\times 4\times 5}x^5 - \frac{3\times 5}{2\times 4\times 6\times 7}x^7 + \frac{3\times 5\times 7}{2\times 4\times 6\times 8\times 9}x^9 + \dots \\
&\quad \dots + (-1)^k\frac{3\times\cdots\times(2k-1)}{2\times\cdots\times(2k)\times(2k+1)}x^{2k+1} + x^{2k+1}\varepsilon(x) \\
\operatorname{argth}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2k+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

## Les inutiles

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots + \mathcal{C}_n^k x^k + \cdots + x^n + 0 \\
\exp(\sinh(x)) - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$