Université de Cergy-Pontoise **2011-2012**
PCST S2

Devoir maison n° 2
Corrigé

Exercice 1.
On a

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}\wedge\vec{c} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_c - z_a y_c \\ z_a x_c - x_a z_c \\ x_a y_c - y_a x_c \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
& (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{c}) \\
= & \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_a z_c - z_a y_c \\ z_a x_c - x_a z_c \\ x_a y_c - y_a x_c \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} (z_a x_b - x_a z_b)(x_a y_c - y_a x_c) - (x_a y_b - y_a x_b)(z_a x_c - x_a z_c) \\ (x_a y_b - y_a x_b)(y_a z_c - z_a y_c) - (y_a z_b - z_a y_b)(x_a y_c - y_a x_c) \\ (y_a z_b - z_a y_b)(z_a x_c - x_a z_c) - (z_a x_b - x_a z_b)(y_a z_c - z_a y_c) \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} z_a x_a x_b y_c - z_a y_a x_b x_c - x_a^2 z_b y_c + x_a y_a z_b x_c - x_a z_a y_b x_c + x_a^2 y_b z_c + y_a z_a x_b x_c - y_a x_a x_b z_c \\ x_a y_a y_b z_c - x_a z_a y_b y_c - y_a^2 x_b z_c + y_a z_a x_b y_c - y_a x_a z_b y_c + y_a^2 z_b x_c + z_a x_a y_b y_c - z_a y_a z_b x_c \\ y_a z_a z_b x_c - y_a x_a z_b z_c - z_a^2 y_b x_c + z_a x_a y_b z_c - z_a y_a x_b z_c + z_a^2 x_b y_c + x_a y_a z_b z_c - x_a z_a z_b y_c \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} [z_a x_b y_c - x_a z_b y_c + y_a z_b x_c - z_a y_b x_c + x_a y_b z_c - y_a x_b z_c]\, x_a - z_a y_a x_b x_c + y_a z_a x_b x_c \\ [x_a y_b z_c - y_a x_b z_c + z_a x_b y_c - x_a z_b y_c + y_a z_b x_c - z_a z_b x_c]\, y_a - x_a z_a y_b y_c + z_a x_a y_b y_c \\ [y_a z_b x_c - z_a y_b x_c + x_a y_b z_c - y_a x_b z_c + z_a x_b y_c - x_a z_b y_c]\, z_a - y_a x_a z_b z_c + x_a y_a z_b z_c \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} [(z_a x_b - x_a z_b) y_c + (y_a z_b - z_a y_b) x_c + (x_a y_b - y_a x_b) z_c]\, x_a \\ [(x_a y_b - y_a x_b) z_c + (z_a x_b - x_a z_b) y_c + (y_a z_b - z_a z_b) x_c]\, y_a \\ [(y_a z_b - z_a y_b) x_c + (x_a y_b - y_a x_b) z_c + (z_a x_b - x_a z_b) y_c]\, z_a \end{pmatrix} \\
= & [(y_a z_b - z_a y_b) x_c + (z_a x_b - x_a z_b) y_c + (x_a y_b - y_a x_b) z_c] \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] &= (\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c} \\
&= \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \\
&= (y_a z_b - z_a y_b) x_c + (z_a x_b - x_a z_b) y_c + (x_a y_b - y_a x_b) z_c
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient finalement

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{a}$$

ce qui prouve l'identité **(1)**. Pour l'identité **(2)**, on a

$$\begin{aligned}
[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{b}\wedge\vec{c},\vec{c}\wedge\vec{a}] &= \Big((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})\Big).(\vec{c}\wedge\vec{a})\\
&= \Big(-(\vec{b}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})\Big).(\vec{c}\wedge\vec{a})\\
&= -\Big((\vec{b}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})\Big).(\vec{c}\wedge\vec{a})
\end{aligned}$$

Or $(\vec{b}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = [\vec{b},\vec{a},\vec{c}]\vec{b}$ d'après l'identité **(1)** donc

$$\begin{aligned}
[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{b}\wedge\vec{c},\vec{c}\wedge\vec{a}] &= -\Big([\vec{b},\vec{a},\vec{c}]\vec{b}\Big).(\vec{c}\wedge\vec{a})\\
&= -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]\Big((\vec{c}\wedge\vec{a}).\vec{b}\Big)\\
&= -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}][\vec{c},\vec{a},\vec{b}]
\end{aligned}$$

De plus $[\vec{b},\vec{a},\vec{c}] = -[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ et $[\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$. Par conséquent, on obtient finalement

$$[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{b}\wedge\vec{c},\vec{c}\wedge\vec{a}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}][\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$$

ce qui prouve l'identité **(2)**.

En utilisant la formule du double produit vectoriel (c'est-à-dire $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$) avec $\vec{u} = \vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a}$ et $\vec{w} = \vec{c}$, on obtient

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{c}) = \Big((\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}\Big)\,\vec{a} - \Big((\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{a}\Big)\,\vec{c} = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{a} - [\vec{a},\vec{b},\vec{a}]\vec{c}$$

Or $[\vec{a},\vec{b},\vec{a}] = 0$ donc $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{a}$ et on vient de retrouver l'identité **(1)**. En utilisant maintenant la formule du double produit vectoriel avec $\vec{u} = \vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b}$ et $\vec{w} = \vec{c}$, on obtient

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \Big((\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}\Big)\,\vec{b} - \Big((\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{b}\Big)\,\vec{c} = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{b} - [\vec{a},\vec{b},\vec{b}]\vec{c}$$

Or $[\vec{a},\vec{b},\vec{b}] = 0$ donc $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{b}$ et

$$\begin{aligned}
[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{b}\wedge\vec{c},\vec{c}\wedge\vec{a}] &= \Big((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})\Big).(\vec{c}\wedge\vec{a})\\
&= \Big([\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{b}\Big).(\vec{c}\wedge\vec{a})\\
&= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\Big((\vec{c}\wedge\vec{a}).\vec{b}\Big)\\
&= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}][\vec{c},\vec{a},\vec{b}]
\end{aligned}$$

De plus $[\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$. Par conséquent, on obtient finalement

$$[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{b}\wedge\vec{c},\vec{c}\wedge\vec{a}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}][\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$$

et on vient de retrouver l'identité **(2)**.

Exercice 2.

(1) D_1 est dirigée par $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et D_1' est dirigée par $\vec{u_1'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus

$$\vec{u_1} \wedge \vec{u_1'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 - (-1) \times 2 \\ (-1) \times (-3) - 2 \times 1 \\ 2 \times 2 - 0 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Donc D_1 et D_1' ne sont pas parallèles (ni confondues). Par conséquent, D_1 et D_1' sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un point d'intersection $I_1(x, y, z)$ et deux paramètres $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} 5 + 2t & = & x & = & -2 - 3t' \\ -3 & = & y & = & -1 + 2t' \\ 3 - t & = & z & = & 6 + t' \end{array} \right.$$

En particulier la deuxième ligne donne l'équation $-3 = -1 + 2t'$ qui admet pour solution $t' = -1$. En reportant dans la première ligne on obtient l'équation $5 + 2t = 1$ qui admet pour solution $t = -2$. Pour ces deux paramètres, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5 + 2t = 1 \\ y = -3 \\ z = 3 - t = 5 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - 3t' = 1 \\ y = -1 + 2t' = -3 \\ z = 6 + t' = 5 \end{array} \right.$$

Ainsi les droites D_1 et D_1' sont coplanaires et sécantes, leur point d'intersection a pour coordonnées $I_1(1, -3, 5)$. En particulier, la distance séparant D_1 et D_1' est nulle.

(2) D_2 est dirigée par $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et D_2' est dirigée par $\vec{u_2'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. De plus

$$\vec{u_2} \wedge \vec{u_2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) - (-1) \times 4 \\ (-1) \times 2 - 1 \times (-2) \\ 1 \times 4 - 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Donc D_2 et D_2' sont parallèles ou confondues. Pour le paramètre $t = 0$, on obtient que les points $A_2(1, -3, 0)$ et $A_2'(4, 3, -1)$ appartiennent à D_2 et à D_2' respectivement. Soit H_2 le pied de la perpendiculaire à D_2 passant par A_2'. Alors

$$\vec{u_2} \wedge \overrightarrow{A_2A_2'} = \vec{u_2} \wedge (\overrightarrow{A_2H_2} + \overrightarrow{H_2A_2'}) = \vec{u_2} \wedge \overrightarrow{A_2H_2} + \vec{u_2} \wedge \overrightarrow{H_2A_2'} = \vec{0} + \vec{u_2} \wedge \overrightarrow{H_2A_2'}$$

car $\vec{u_2}$ et $\overrightarrow{A_2H_2}$ sont colinéaires. De plus

$$\left\| \vec{u_2} \wedge \overrightarrow{H_2A_2'} \right\| = \|\vec{u_2}\| \, H_2A_2'$$

car $\vec{u_2}$ et $\overrightarrow{H_2A_2'}$ sont orthogonaux. Par conséquent la distance entre D_2 et D_2', qui est égale à

H_2A_2' (par construction de H_2), est donnée par

$$\begin{aligned}
H_2A_2' &= \frac{\left\|\vec{u_2} \wedge \overrightarrow{H_2A_2'}\right\|}{\|\vec{u_2}\|} = \frac{\left\|\vec{u_2} \wedge \overrightarrow{A_2A_2'}\right\|}{\|\vec{u_2}\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-(-3) \\ -1-0 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \left\| \begin{pmatrix} 2\times(-1)-(-1)\times 6 \\ -1\times 3 - 1\times(-1) \\ 1\times 6 - 2\times 3 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{4^2+(-2)^2+0^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{20} \;=\; 2\sqrt{\frac{5}{6}}
\end{aligned}$$

Ainsi D_2 et D_2' sont parallèles et distantes de $2\sqrt{\frac{5}{6}}$.

(3) D_3 est dirigée par $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et D_3' est dirigée par $\vec{u_3'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. De plus

$$\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times(-2)-0\times(-2) \\ 0\times 3-(-1)\times(-2) \\ (-1)\times(-2)-1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Donc D_3 et D_3' ne sont pas parallèles (ni confondues). Pour le paramètre $t=0$, on obtient que les points $A_3(-3,-1,5)$ et $A_3'(7,-5,2)$ appartiennent à D_3 et à D_3' respectivement. Soient H_3 et H_3' les pieds de la perpendiculaire commune à D_3 et D_3'. Alors

$$\begin{aligned}
[\vec{u_3}, \vec{u_3'}, \overrightarrow{A_3A_3'}] &= (\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}).\overrightarrow{A_3A_3'} = (\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}).(\overrightarrow{A_3H_3} + \overrightarrow{H_3H_3'} + \overrightarrow{H_3'A_3'}) \\
&= (\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}).\overrightarrow{A_3H_3} + (\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}).\overrightarrow{H_3H_3'} + (\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}).\overrightarrow{H_3'A_3'} \\
&= [\vec{u_3}, \vec{u_3'}, \overrightarrow{A_3H_3}] + [\vec{u_3}, \vec{u_3'}, \overrightarrow{H_3H_3'}] + [\vec{u_3}, \vec{u_3'}, \overrightarrow{H_3'A_3'}] \\
&= 0 + [\vec{u_3}, \vec{u_3'}, \overrightarrow{H_3H_3'}] + 0
\end{aligned}$$

car u_3 et $\overrightarrow{A_3H_3}$ sont colinéaires ainsi que u_3' et $\overrightarrow{A_3'H_3'}$. De plus

$$\left|[\vec{u_3}, \vec{u_3'}, \overrightarrow{H_3H_3'}]\right| = \left|(\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}).\overrightarrow{H_3H_3'}\right| = \left\|\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}\right\| H_3H_3'$$

car $\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}$ et $\overrightarrow{H_3H_3'}$ sont colinéaires (la droite dirigée par $\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}$ est perpendiculaire à D_3 (puisqu'elle est dirigée par $\vec{u_3}$) et à D_3' (puisqu'elle est dirigée par $\vec{u_3'}$), il s'agit donc de la perpendiculaire commune à D_3 et D_3' qui est dirigée par $\overrightarrow{H_3H_3'}$). Par conséquent la distance entre D_3 et D_3', qui est égale à H_3H_3' (par construction de H_3 et H_3'), est donnée par

$$\begin{aligned}
H_3H_3' &= \frac{\left|[\vec{u_3}, \vec{u_3'}, \overrightarrow{H_3H_3'}]\right|}{\left\|\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}\right\|} = \frac{\left|[\vec{u_3}, \vec{u_3'}, \overrightarrow{A_3A_3'}]\right|}{\left\|\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}\right\|} = \frac{\left|(\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}).\overrightarrow{A_3A_3'}\right|}{\left\|\vec{u_3} \wedge \vec{u_3'}\right\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}} \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7-(-3) \\ -5-(-1) \\ 2-5 \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{9}} \left|(-2)\times 10 + (-2)\times(-4) + (-1)\times(-3)\right| = \frac{1}{3}\left|-9\right| = 3
\end{aligned}$$

Ainsi D_3 et D'_3 ne sont pas coplanaires et sont distantes de 3.

Exercice 3.

(1) La droite (AB), portée par l'arête $[AB]$, contient le point $A(-2,4,2)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-(-2) \\ -1-4 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Par conséquent, une équation paramétrique de (AB) est donnée par

$$(AB) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2-t \\ y & = & 4-5t \\ z & = & 2-3t \end{array} \right.$$

En procédant de même pour les cinq autres arêtes de $ABCD$, on obtient

$$(AC) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2+2t \\ y & = & 4-3t \\ z & = & 2+t \end{array} \right. \qquad (AD) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2+6t \\ y & = & 4+2t \\ z & = & 2+4t \end{array} \right.$$

$$(BC) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3+3t \\ y & = & -1+2t \\ z & = & -1+4t \end{array} \right. \qquad (BD) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3+7t \\ y & = & -1+7t \\ z & = & -1+7t \end{array} \right. \qquad (CD) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4t \\ y & = & 1+5t \\ z & = & 3+3t \end{array} \right.$$

(2) Le plan (ABC), portée par la face ABC, admet $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ pour vecteur normal. De plus

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} & = & \begin{pmatrix} -3-(-2) \\ -1-4 \\ -1-2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 1-4 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} (-5)\times 1-(-3)\times(-3) \\ (-3)\times 2-(-1)\times 1 \\ (-1)\times(-3)-(-5)\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc l'équation cartésienne de (ABC) est de la forme $-14x-5y+13z+d=0$. Et puisque ce plan contient le point $A(-2,4,2)$, on en déduit la constante d :

$$-14\times(-2)-5\times 4+13\times 2+d=0 \quad \Longrightarrow \quad 34+d=0 \quad \Longrightarrow \quad d=-34$$

Par conséquent, l'équation paramétrique de (ABC) est donnée par

$$(ABC) : -14x-5y+13z-34=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 14x+5y-13z+34=0$$

En procédant de même pour les trois autres faces de $ABCD$, on obtient

$$(ABD) : -14x-14y+28z-28=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x+y-2z+2=0$$

$$(ACD) : -14x-2y+22z-64=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 7x+y-11z+32=0$$

$$(BCD) : -14x+7y+7z-28=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x-y-z+4=0$$

(3) Le volume du tétraèdre $ABCD$ est donné par la formule

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right| &= \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix} -3-(-2) \\ -1-4 \\ -1-2 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 1-4 \\ 3-2 \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 6-4 \\ 6-2 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} (-5)\times 1-(-3)\times(-3) \\ (-3)\times 2-(-1)\times 1 \\ (-1)\times(-3)-(-5)\times 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|-14\times 6-5\times 2+13\times 4\right| = \frac{1}{6}\left|-42\right| = 7
\end{aligned}$$

Ainsi le volume du tétraèdre $ABCD$ est 7.

(4) La distance du point $M(x_M, y_M, z_M)$ au plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ est donnée par la formule

$$\frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

On en déduit donc l'expression de la distance du point M à chacune des faces de $ABCD$.

$$d(M,ABC) = \frac{|14x_M+5y_M-13z_M+34|}{\sqrt{14^2+5^2+(-13)^2}} = \frac{|14x_M+5y_M-13z_M+34|}{\sqrt{390}}$$

$$d(M,ABD) = \frac{|x_M+y_M-2z_M+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|x_M+y_M-2z_M+2|}{\sqrt{6}}$$

$$d(M,ACD) = \frac{|7x_M+y_M-11z_M+32|}{\sqrt{7^2+1^2+(-11)^2}} = \frac{|7x_M+y_M-11z_M+32|}{\sqrt{171}}$$

$$d(M,BCD) = \frac{|2x_M-y_M-z_M+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{|2x_M-y_M-z_M+4|}{\sqrt{6}}$$

(5) Si le point $M(x_M, y_M, z_M)$ se trouve au centre de la sphère inscrite à $ABCD$ alors

$$d(M,ABC) = d(M,ABD) = d(M,ACD) = d(M,BCD)$$

De plus pour chaque face de $ABCD$, le centre M de la sphère inscrite se trouve du même côté du plan porté par cette face que le sommet opposé à cette face. Ainsi

– M se trouve du même côté de $(ABC) : 14x+5y-13z+34=0$ que $D(4,6,6)$ implique

$$14\times 4+5\times 6-13\times 6+34 = 42 > 0 \quad\Longrightarrow\quad 14x_M+5y_M-13z_M+34>0$$

– M se trouve du même côté de $(ABD) : x+y-2z+2=0$ que $C(0,1,3)$ implique

$$0+1-2\times 3+2 = -3 < 0 \quad\Longrightarrow\quad x_M+y_M-2z_M+2<0$$

– M se trouve du même côté de $(ACD) : 7x+y-11z+32=0$ que $B(-3,-1,-1)$ implique

$$7\times(-3)+(-1)-11\times(-1)+32 = 21 > 0 \quad\Longrightarrow\quad 7x_M+y_M-11z_M+32>0$$

– M se trouve du même côté de $(BCD) : 2x-y-z+4=0$ que $A(-2,4,2)$ implique

$$2\times(-2)-4-2+4 = -6 < 0 \quad\Longrightarrow\quad 2x_M-y_M-z_M+4<0$$

Ainsi on obtient les égalités suivantes :

$$\frac{14x_M + 5y_M - 13z_M + 34}{\sqrt{390}} = \frac{-(x_M + y_M - 2z_M + 2)}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{7x_M + y_M - 11z_M + 32}{\sqrt{171}} = \frac{-(2x_M - y_M - z_M + 4)}{\sqrt{6}}$$

En particulier $d(M, ABD) = d(M, BCD)$ entraine $x_M + y_M - 2z_M + 2 = 2x_M - y_M - z_M + 4$ et donc

$$x_M = 2y_M - z_M - 2$$

En reportant dans les égalités précédentes, on obtient

$$\frac{3}{\sqrt{390}}(11y_M - 9z_M + 2) = \frac{-3}{\sqrt{6}}(y_M - z_M)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{171}}(5y_M - 6z_M + 6) = \frac{-3}{\sqrt{6}}(y_M - z_M)$$

$d(M, ABC) = d(M, ABD)$ entraine $11y_M - 9z_M + 2 = -\sqrt{\frac{390}{6}}(y_M - z_M) = -\sqrt{65}(y_M - z_M)$ et donc

$$y_M = \frac{1}{33 + 3\sqrt{65}}\left((27 + 3\sqrt{65})z_M - 6\right) = \frac{1}{224}\left((136 + 8\sqrt{65})z_M + (-88 + 8\sqrt{65})\right)$$

En reportant dans les égalités précédentes, on obtient

$$\frac{\sqrt{6}}{56}(11 - \sqrt{65})(z_M + 1) = \frac{\sqrt{6}}{56}(11 - \sqrt{65})(z_M + 1)$$

$$= \frac{3}{5264\sqrt{171}}(83 - 5\sqrt{65})\left(-188z_M + (393 + 35\sqrt{65})\right) = \frac{\sqrt{6}}{56}(11 - \sqrt{65})(z_M + 1)$$

Enfin $d(M, ABC) = d(M, ACD)$ entraine

$$\begin{aligned} z_M + 1 &= \frac{3 \times 56}{5264\sqrt{6 \times 171}}\left(\frac{83 - 5\sqrt{65}}{11 - \sqrt{65}}\right)\left(-188z_M + (393 + 35\sqrt{65})\right) \\ &= \frac{\sqrt{114}}{10716}\left(\frac{21 + \sqrt{65}}{2}\right)\left(-188z_M + (393 + 35\sqrt{65})\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{-21432 + \sqrt{114}(21 + \sqrt{65})(393 + 35\sqrt{65})}{21432 + 188\sqrt{114}(21 + \sqrt{65})} \\ &= \frac{-21432 + \sqrt{114}(10528 + 1128\sqrt{65})}{188\left(114 + \sqrt{114}(21 + \sqrt{65})\right)} \\ &= \frac{-114 + \sqrt{114}(56 + 6\sqrt{65})}{114 + \sqrt{114}(21 + \sqrt{65})} \approx 2.358 \end{aligned}$$

En reportant dans l'expression de y_M puis dans celle de x_M, on obtient

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{6\left(-19+\sqrt{114}(7+\sqrt{65})\right)}{114+\sqrt{114}(21+\sqrt{65})} \approx 2.005 \\ x_M &= \frac{-2\left(171+\sqrt{114}(7-2\sqrt{65})\right)}{114+\sqrt{114}(21+\sqrt{65})} \approx -0.347 \end{aligned}$$

Finalement les coordonnées du centre de la sphère inscrite à $ABCD$ sont approximativement $(2.358, 2.005, -0.347)$.

Exercice 4. Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point de la sphère S. Les coordonnées de M vérifient donc l'équation suivante

$$(x_M-0)^2+(y_M-0)^2+(z_M-0)^2 = 1^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x_M^2+y_M^2+z_M^2=1$$

Puisque la sphère S est de centre $O(0,0,0)$, le vecteur $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_M-0 \\ y_M-0 \\ z_M-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ est normal au plan tangent à S en M. L'équation cartésienne de ce plan tangent est donc de la forme

$$x_M x + y_M y + z_M z + d = 0$$

Puisque ce plan tangent contient le point $M(x_M, y_M, z_M)$, on en déduit la constante d :

$$x_M x_M + y_M y_M + z_M z_M + d = 0 \quad\Longrightarrow\quad d = -(x_M^2+y_M^2+z_M^2) = -1$$

Si ce plan tangent contient la droite D alors les coordonnées de chaque point de D vérifient l'équation cartésienne du plan tangent, et donc l'égalité suivante est vraie pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$x_M(2t)+y_M(2-t)+z_M(-1+t)-1=0$$

c'est-à-dire

$$(2x_M-y_M+z_M)t+(2y_M-z_M-1)=0$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $t\in\mathbb{R}$, on en déduit

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x_M-y_M+z_M=0 \\ 2y_M-z_M-1=0 \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} z_M = -2x_M+y_M \\ 2y_M-(-2x_M+y_M)-1=0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} z_M = -2x_M+(-2x_M+1) = -4x_M+1 \\ y_M = -2x_M+1 \end{cases} \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation vérifiée par les coordonnées de M on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= x_M^2+y_M^2+z_M^2 = x_M^2+(-2x_M+1)^2+(-4x_M+1)^2 \\ &= x_M^2+4x_M^2-4x_M+1+16x_M^2-8x_M+1 \\ &= 21x_M^2-12x_M+2 \end{aligned}$$

Ainsi x_M est solution d'une équation de degré 2 de discriminant $\Delta=(-12)^2-4\times21\times1=60>0$. Donc

$$x_M = \frac{12+\sqrt{60}}{2\times21} = \frac{6+\sqrt{15}}{21} \quad\text{ou}\quad x_M = \frac{12-\sqrt{60}}{2\times21} = \frac{6-\sqrt{15}}{21}$$

Il n'existe donc que deux points M de la sphère S tels que le plan tangent à S en M contienne la droite D. Ces deux points ont pour coordonnées :

$$M_1\left(\frac{6+\sqrt{15}}{21}, -2\left(\frac{6+\sqrt{15}}{21}\right)+1=\frac{9-2\sqrt{15}}{21}, -4\left(\frac{6+\sqrt{15}}{21}\right)+1=\frac{-3-4\sqrt{15}}{21}\right)$$

$$M_2\left(\frac{6-\sqrt{15}}{21}, -2\left(\frac{6-\sqrt{15}}{21}\right)+1=\frac{9+2\sqrt{15}}{21}, -4\left(\frac{6-\sqrt{15}}{21}\right)+1=\frac{-3+4\sqrt{15}}{21}\right)$$

Les plans tangents à S correspondants ont pour équations cartésiennes :

$$P_1 : \frac{6+\sqrt{15}}{21}x+\frac{9-2\sqrt{15}}{21}y-\frac{3+4\sqrt{15}}{21}z-1=0$$

$$P_2 : \frac{6-\sqrt{15}}{21}x+\frac{9+2\sqrt{15}}{21}y-\frac{3-4\sqrt{15}}{21}z-1=0$$