

Examen session n° 2

Durée : 2h

Il faut soigner la rédaction et la présentation. Souligner vos résultats.
Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1

1) On considère la fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Déterminer, à l'aide des coordonnées polaires, la limite en $(0, 0)$ de la fonction f .
En déduire que f est continue sur tout \mathbb{R}^2 .
- Calculer, sous réserve d'existence, les dérivées partielles premières de f .
- f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur tout \mathbb{R}^2 ?

2) On considère la fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} suivante :

$$g(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y + 1$$

- Déterminer les points critiques de g .
- En déduire l'étude des extrema locaux de g .
- Les extrema obtenus à la question précédente sont-ils absolus ?

Exercice 2

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère les plans suivants :

$$\mathcal{P}_1 : 4y - z = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : 17x + y + 4z = 13$$

- Etudier la position relative de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .
Préciser la nature de leur intersection que l'on notera \mathcal{D} .
- Vérifier que les points $A(1, 0, -1)$ et $B(0, 1, 3)$ appartiennent à \mathcal{D} .
- En déduire une représentation paramétrique de \mathcal{D} .

2) Soit le point $M(-1, 0, 3)$.

a) Calculer $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan \mathcal{P} contenant \mathcal{D} et M est donnée par :

$$\mathcal{P} : 2x - 2y + z = 1$$

c) Calculer la distance du point $C(-2, 3, 2)$ au plan \mathcal{P} .

Exercice 3

1) On considère la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice inverse de P est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 13 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

b) En utilisant un équivalent matriciel, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 5x + y + 2z = -5 \\ x - y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

2) On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -31 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les valeurs propres de M .

b) Déterminer les vecteurs propres de M . En déduire que P est une matrice de passage.

c) Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. Justifier votre résultat à l'aide des questions précédentes.

d) En déduire l'expression de M^{42} .

Exercice 4

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Caractériser l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant :

$$16x^2 + 25y^2 - 32x - 384 = 0$$

On précisera l'excentricité, le centre, les foyers, les directrices et les sommets.

2) Même question pour l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant :

$$9x^2 - 16y^2 + 18x - 135 = 0$$