Université de Cergy-Pontoise **2010-2011**
PCST S2

Devoir maison n° 1

(à rendre dans la semaine du 07/02)

Exercice 1. Soit la fonction suivante :

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-2x-3}}$$

1. Déterminez le plus grand domaine sur lequel la fonction f_1 est continue.
2. Dessinez quelques courbes de niveaux pour f_1.

Exercice 2. Soit la fonction suivante :

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f_2 est-elle continue en $(0,0)$? Si non, donnez deux exemples de chemins de $\mathbb{R}^2$ tendant vers $(0,0)$ sur lesquels f_2 converge vers deux limites différentes.

Exercice 3. Soit la fonction suivante :

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+3xy^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrez que la fonction f_3 est continue en $(0,0)$.
2. Montrez que les dérivées partielles de f_3 existent sur $\mathbb{R}^2$ et donnez leur expression.
3. Montrez que f_3 n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4. Soit la fonction suivante :

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_4(x,y) = \cos(xy) + \sin(xy)$$

1. Montrez que la fonction f_4 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer une équation du plan tangent à la surface $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = f_4(x,y)\}$ au point $(\pi, 1, -1)$.

Exercice 5. Soit la fonction suivante :

$$f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_5(x,y) = \begin{cases} x^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrez que la fonction f_5 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en justifiant précisemment votre réponse.
2. Calculez les dérivées partielles d'ordre 2 de f_5 lorsqu'elles existent.
3. Discutez du résultat du théorème de Schwarz pour la fonction f_5.