Université de Cergy-Pontoise **2010-2011**
PCST S2

Devoir maison n° 1
Corrigé

Exercice 1. 1. f_1 est la composée des trois fonctions suivantes :

- $(x,y) \mapsto x^2+y^2-2x-3$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynomiale)
- $u \mapsto \sqrt{u}$ qui est définie et continue pour $u = (x^2+y^2-2x-3) \geqslant 0$
- $w \mapsto \frac{1}{w}$ qui est définie et continue pour $w = \sqrt{x^2+y^2-2x-3} \neq 0$

Or on a :

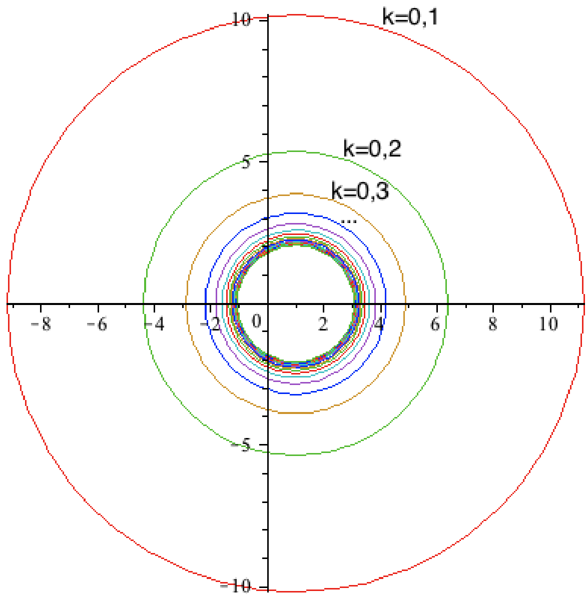
$$\begin{aligned} \begin{cases} (x^2+y^2-2x-3) \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2+y^2-2x-3} \neq 0 \end{cases} &\iff x^2+y^2-2x-3 > 0 \\ &\iff (x^2-2x+1)+y^2-4 > 0 \\ &\iff (x-1)^2+y^2 > 4 \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle. Ainsi le plus grand domaine $\mathcal{D}_{f_1}$ sur lequel f_1 est continue, est l'extérieur du disque fermé de centre $(1,0)$ et de rayon 2.

$$\mathcal{D}_{f_1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2+y^2 > 4\right\}$$

2. La courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ pour f_1 est l'ensemble $\mathcal{L}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f_1(x,y) = k\}$. Pour $(x,y) \in \mathcal{D}_{f_1}$ on a :

$$\begin{aligned} f_1(x,y) = k &\iff \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-2x-3}} = k \\ &\iff \sqrt{x^2+y^2-2x-3} = \frac{1}{k} && \text{si } k \neq 0 \\ &\iff x^2+y^2-2x-3 = \frac{1}{k^2} && \text{si } k > 0 \\ &\iff (x^2-2x+1)+y^2-4 = \frac{1}{k^2} \\ &\iff (x-1)^2+y^2 = 4+\frac{1}{k^2} \end{aligned}$$



Quelques lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ pour f_1

Finalement
- si $k \leqslant 0$ alors la courbe de niveau $\mathcal{L}_k$ est vide (ou n'existe pas) ;
- sinon ($k > 0$), la courbe de niveau $\mathcal{L}_k$ est un cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $\sqrt{4+\frac{1}{k^2}}$ (voir la figure de la page précédente).

Exercice 2. La fonction f_2 est continue en $(0,0)$ si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = f_2(0,0)$. Pour calculer cette limite, on peut utiliser les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) r\sin(\theta)\left((r\cos(\theta))^2-(r\sin(\theta))^2\right)}{\left((r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2\right)^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^4}{r^4}\left[\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right)}{\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)^2}\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\left[\cos(\theta)\sin(\theta)\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right)\right] \quad \text{car } \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1 \\
&= \cos(\theta)\sin(\theta)\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right)
\end{aligned}$$

Puisque le résultat dépend toujours de θ, la limite n'existe pas. Donc f_2 n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour trouver deux chemins de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels f_2 converge vers deux limites différentes, il suffit de considérer des droites passant par $(0,0)$ et de coefficient directeur $\tan(\theta)$ telles que la limite calculée ci-dessus ait deux valeurs différentes pour deux valeurs différentes de θ. Par exemple sur les chemins $y=0$ ($\theta=0$) et $y=2x$ ($\theta=\arctan(2)$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f_2(x,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{(x^2+0)^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \\
\lim_{x\to 0} f_2(x,2x) &= \lim_{x\to 0}\frac{2x^2(x^2-4x^2)}{(x^2+4x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-6x^4}{25x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-6}{25} = -\frac{6}{25} \neq 0
\end{aligned}$$

Exercice 3. 1. En utilisant les coordonnées polaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+3xy^2-y^3}{x^2+y^2} &= \frac{(r\cos(\theta))^3+3(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))^2-(r\sin(\theta))^3}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2} \\
&= \frac{r^3}{r^2}\left[\frac{\cos^3(\theta)+3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\sin^3(\theta)}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}\right] \\
&= r\left[\cos^3(\theta)+3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\sin^3(\theta)\right] \quad \text{car } \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3xy^2-y^3}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{r\to 0} r\left[\cos^3(\theta)+3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\sin^3(\theta)\right] \\
&= 0 \\
&= f_3(0,0)
\end{aligned}$$

Donc f_3 est bien continue en $(0,0)$.

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, la fonction $(x,y) \mapsto f_3(x,y) = \frac{x^3+3xy^2-y^3}{x^2+y^2}$ admet des dérivées partielles en x et en y en tant que quotient de fonctions dérivables (fonctions polynomiales) dont le dénominateur est non nul (car $x^2+y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$). D'après la formule de dérivation d'un quotient, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) &= \frac{(3x^2+3y^2+0)(x^2+y^2)-2x(x^3+3xy^2-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+2xy^3+3y^4}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) &= \frac{(0+6xy-3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^3+3xy^2-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^3y-3x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Pour le cas où $(x,y)=(0,0)$, on revient à la définition des dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f_3(x,0)-f_3(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3+0+0}{x^2+0}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \\
\frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f_3(0,y)-f_3(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0+0-y^3}{0+y^2}-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1
\end{aligned}$$

Finalement les dérivées partielles en x et en y existent bien pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. La fonction f_3 est différentiable en $(0,0)$ si

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_3(x,y)-f_3(0,0)-\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0).x-\frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0).y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

On utilise encore les coordonnées polaires pour calculer cette limite. A l'aide du calcul effectué à la première question, on obtient :

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+3xy^2-y^3}{x^2+y^2}-0-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r\left[\cos^3(\theta)+3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\sin^3(\theta)\right]-r\cos(\theta)+r\sin(\theta)}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r}{r}\left[\frac{\cos^3(\theta)+3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\sin^3(\theta)-\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}}\right] \\
&= \lim_{r\to 0} \left[\cos^3(\theta)+3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\sin^3(\theta)-\cos(\theta)+\sin(\theta)\right] \\
&= \cos^3(\theta)+3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\sin^3(\theta)-\cos(\theta)+\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Puisque le résultat dépend toujours de θ (par exemple $\theta=0$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$ ne donnent pas le même résultat), la limite n'existe pas. En particulier, f_3 n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4. 1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction f_4 admet des dérivées partielles en x et en y en tant que somme de composées de fonctions dérivables. D'après la formule de dérivation d'une composée, on obtient :

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy)+y\cos(xy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = -x\sin(xy)+x\cos(xy)$$

En particulier, les dérivées partielles $\frac{\partial f_4}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_4}{\partial y}$ existent et sont continues en tant que sommes, produits et composées de fonctions continues. Par consequent, f_4 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. L'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point (a,b,c) est donnée par :

$$z = \frac{\partial f_4}{\partial x}(a,b).(x-a) + \frac{\partial f_4}{\partial y}(a,b).(y-b) + c$$

Pour $(a,b,c) = (\pi, 1, -1)$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x}(\pi,1) &= -\sin(\pi) + \cos(\pi) = -0 - 1 = -1\\ \frac{\partial f_4}{\partial y}(\pi,1) &= -\pi\sin(\pi) + \pi\cos(\pi) = -0 - \pi = -\pi\end{aligned}$$

On en déduit l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $(\pi, 1, -1)$:

$$z = -(x-\pi) - \pi(y-1) - 1 = -x - \pi y + 2\pi - 1$$

Exercice 5. 1. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, la fonction $(x,y) \mapsto f_5(x,y) = x^2\ln(x^2+y^2)$ admet des dérivées partielles en x et en y en tant que produit et composée de fonctions dérivables car $(x,y) \neq (0,0)$ implique $x^2+y^2 > 0$ et la fonction $z \mapsto \ln(z)$ est dérivable pour $z > 0$. D'après les formules de dérivation d'un produit et d'une composée, on obtient :

$$\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

En particulier, les dérivées partielles $\frac{\partial f_5}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_5}{\partial y}$ existent et sont continues pour $(x,y) \neq (0,0)$ en tant que sommes, produits et composées de fonctions continues. Pour le cas où $(x,y) = 0$, on revient à la définition des dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_5}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f_5(x,0) - f_5(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln(x^2+0) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} 2x\ln(x) = 0\\ \frac{\partial f_5}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f_5(0,y) - f_5(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

Ainsi les dérivées partielles $\frac{\partial f_5}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_5}{\partial y}$ existent aussi en $(0,0)$. Pour montrer leur continuité en ce point, on utilise les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2}\\ &= \lim_{r\to 0} 2r\cos(\theta)\ln\left((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2\right) + \frac{2(r\cos(\theta))^3}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}\\ &= \lim_{r\to 0} 4r\cos(\theta)\ln(r) + 2r\cos^3(\theta) \quad \text{car } \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1\\ &= 0 = \frac{\partial f_5}{\partial x}(0,0) \quad \text{car } \lim_{r\to 0} r\ln(r) = 0\\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{2(r\cos(\theta))^2(r\sin(\theta))}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}\\ &= \lim_{r\to 0} 2r\cos^2(\theta)\sin(\theta) \quad \text{car } \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1\\ &= 0 = \frac{\partial f_5}{\partial y}(0,0)\end{aligned}$$

Finalement, les dérivées partielles $\frac{\partial f_5}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_5}{\partial y}$ existent et sont continues pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par consequent, f_5 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Les mêmes justifications qu'à la question précédente montrent que les dérivées partielles $\frac{\partial f_5}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_5}{\partial y}$ sont dérivables par rapport à x ou par rapport à y pour $(x,y) \neq (0,0)$. De plus :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial \frac{\partial f_5}{\partial x}}{\partial x}(x,y) &= 2\ln(x^2+y^2) + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + \frac{6x^2(x^2+y^2)-4x^4}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 2\ln(x^2+y^2) + \frac{10x^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^4}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f_5}{\partial yx}(x,y) = \frac{\partial \frac{\partial f_5}{\partial x}}{\partial y}(x,y) &= \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f_5}{\partial xy}(x,y) = \frac{\partial \frac{\partial f_5}{\partial y}}{\partial x}(x,y) &= \frac{4xy(x^2+y^2)-4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f_5}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial \frac{\partial f_5}{\partial y}}{\partial y}(x,y) &= \frac{2x^2(x^2+y^2)-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Pour le cas où $(x,y) = 0$, on revient à la définition des dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f_5}{\partial x}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\ln(x^2) + \frac{2x^3}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} 4\ln(x) + 2 = -\infty \\
\frac{\partial^2 f_5}{\partial yx}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f_5}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f_5}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \\
\frac{\partial^2 f_5}{\partial xy}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f_5}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f_5}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \\
\frac{\partial^2 f_5}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f_5}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f_5}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0
\end{aligned}$$

Finalement toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f_5 existent, sauf $\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}$ qui existe seulement pour $(x,y) \neq (0,0)$.

3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, les dérivées partielles d'ordre 2 de f_5 existent et sont continues en tant que sommes, produits et composées de fonctions continues. D'après le théorème de Schwarz, les dérivées partielles croisées d'ordre 2 sont donc égales comme le confirment les calculs effectués à la question précédente :

$$\frac{\partial^2 f_5}{\partial yx}(x,y) = \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2 f_5}{\partial xy}(x,y) \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

Les dérivées partielles croisées d'ordre 2 sont aussi égales en $(0,0)$ mais ce résultat n'est pas une conséquence du théorème de Schwarz puisque la dérivée partielle $\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}$ n'existe pas en $(0,0)$. De plus, on pourrait montrer que les trois autres dérivées partielles d'ordre 2 de f_5 ne sont pas continues en $(0,0)$.

Université de Cergy-Pontoise 2010-2011
PCST S2

Devoir maison n$^{\text{o}}$ 1
Proposition de barème

Exercice 1. 3 points

1. détermination de $\mathcal{D}_{f_1}$: **1 point**
2. – détermination de $\mathcal{L}_k$ pour $k \leqslant 0$: **0,25 points**
   – détermination de $\mathcal{L}_k$ pour $k > 0$: **0,75 points**
   – figure : **1 point**

Exercice 2. 2 points

– calcul de la limite de f_2 en $(0,0)$: **1 point**
– détermination de deux chemins : **1 point**

Exercice 3. 5 points

1. calcul de la limite de f_3 en $(0,0)$: **1 point**
2. – justification de l'existence des dérivées partielles de f_3 pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,5 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,75 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,75 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0)$: **0,5 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0)$: **0,5 points**
3. calcul de la limite L : **1 point**

Exercice 4. 2 points

1. – justification de l'existence des dérivées partielles de f_4 : **0,25 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y)$: **0,25 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y)$: **0,25 points**
   – justification de la continuité des dérivées partielles de f_4 : **0,25 points**
2. détermination de l'équation du plan tangent : **1 point**

Exercice 5. 8 points

1. – justification de l'existence des dérivées partielles de f_5 pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,25 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,5 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,5 points**
   – justification de la continuité des dérivées partielles de f_5 pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,25 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_5}{\partial x}(0,0)$: **0,25 points**
   – calcul de $\frac{\partial f_5}{\partial y}(0,0)$: **0,25 points**
   – calcul de la limite de $\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y)$ en $(0,0)$: **0,5 points**
   – calcul de la limite de $\frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y)$ en $(0,0)$: **0,5 points**

2. – calcul de $\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,5 points**
   – calcul de $\frac{\partial^2 f_5}{\partial yx}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,5 points**
   – calcul de $\frac{\partial^2 f_5}{\partial xy}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,5 points**
   – calcul de $\frac{\partial^2 f_5}{\partial y^2}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$: **0,5 points**
   – calcul de $\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}(0,0)$: **0,25 points**
   – calcul de $\frac{\partial^2 f_5}{\partial yx}(0,0)$: **0,25 points**
   – calcul de $\frac{\partial^2 f_5}{\partial xy}(0,0)$: **0,25 points**
   – calcul de $\frac{\partial^2 f_5}{\partial y^2}(0,0)$: **0,25 points**
3. justification que le théorème de Schwarz s'applique pour $(x,y) \neq (0,0)$: **1 point**

   justification que le théorème de Schwarz ne s'applique pas en $(0,0)$: **1 point**