

Contrôle continu n° 3 (dure : 1h)

Question de cours 1 : Une fonction f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ telle que les restrictions $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ où $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ admettent un prolongement de classe \mathcal{C}^1 (c'est-à-dire continue, dérivable et de dérivée continue) sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Exercice 2 : 1. $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ pour tout $n \geq 0$ car $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ est paire et $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$ pour tout $n \geq 1$ car $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire. En particulier on a $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\lambda x} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\lambda \pi} (e^{\lambda \pi} - 1)$. Pour $n \geq 1$, on utilise des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\lambda x} \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[e^{\lambda x} \cdot \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \lambda e^{\lambda x} \cdot \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= 0 - \frac{2}{\pi} \left[\lambda e^{\lambda x} \cdot \frac{-\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \lambda^2 e^{\lambda x} \cdot \frac{-\cos(nx)}{n^2} dx = \frac{2\lambda}{\pi n^2} ((-1)^n e^{\lambda \pi} - 1) - \frac{\lambda^2}{n^2} a_n(f) \end{aligned}$$

et donc :

$$a_n(f) = \frac{\frac{2\lambda}{\pi n^2} ((-1)^n e^{\lambda \pi} - 1)}{1 + \frac{\lambda^2}{n^2}} = \frac{2\lambda}{\pi(n^2 + \lambda^2)} ((-1)^n e^{\lambda \pi} - 1)$$

(On peut également obtenir directement $a_n(f)$ en remplaçant $\cos(nx)$ par $\frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$ avant d'intégrer).

- Puisque f est 2π périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux (car $x \mapsto e^{\lambda x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}), elle vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet. Ainsi la série de Fourier $S(f)$ de f converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $S(f)(t) = \frac{1}{2} (\lim_{s \rightarrow t^-} f(s) + \lim_{s \rightarrow t^+} f(s))$. De plus, f est continue sur \mathbb{R} (car $f(-\pi) = f(\pi)$ par parité de f) donc $\lim_{s \rightarrow t^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow t^+} f(s) = f(t)$ et par conséquent $S(f)(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Pour $t \in \mathbb{R}$, $S(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)) = \frac{e^{\lambda \pi} - 1}{\lambda \pi} + \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{\lambda \pi} - 1}{n^2 + \lambda^2} \cos(nt)$. En particulier les valeurs en $t = 0$ et $t = \pi$ donnent :

$$\begin{aligned} e^{\lambda \pi} S(f)(0) + S(f)(\pi) &= (e^{\lambda \pi} + 1) \left(\frac{e^{\lambda \pi} - 1}{\lambda \pi} \right) + \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\lambda \pi} ((-1)^n e^{\lambda \pi} - 1) + ((-1)^n e^{\lambda \pi} - 1) (-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \\ &= \frac{e^{2\lambda \pi} - 1}{\lambda \pi} + \frac{2\lambda (e^{2\lambda \pi} - 1)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs on a vu que $e^{\lambda \pi} S(f)(0) + S(f)(\pi) = e^{\lambda \pi} f(0) + f(\pi) = e^{\lambda \pi} \cdot 1 + e^{\lambda \pi} = 2e^{\lambda \pi}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} = \left(2e^{\lambda \pi} - \frac{e^{2\lambda \pi} - 1}{\lambda \pi} \right) \frac{\pi}{2\lambda (e^{2\lambda \pi} - 1)} = \frac{\pi e^{\lambda \pi}}{\lambda (e^{2\lambda \pi} - 1)} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ on a $\left| \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ (somme de Riemann). Ainsi la série de fonctions $\lambda \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2}$ converge normalement et en particulier uniformément sur \mathbb{R} . On en déduit d'après le théorème de continuité des séries de fonctions et en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\pi e^{\lambda \pi}}{\lambda (e^{2\lambda \pi} - 1)} - \frac{1}{2\lambda^2} \right) = \frac{-\pi^2}{12} \end{aligned}$$

$$\text{car : } \frac{\pi e^{\lambda \pi}}{\lambda (e^{2\lambda \pi} - 1)} = \frac{\pi \left(1 + \pi \lambda + \frac{\pi^2 \lambda^2}{2} + o_{\lambda \rightarrow 0}(\lambda^2) \right)}{\lambda \left(2\pi \lambda + 2\pi^2 \lambda^2 + \frac{4\pi^3 \lambda^3}{3} + o_{\lambda \rightarrow 0}(\lambda^3) \right)} = \frac{1}{2\lambda^2} \left(1 - \frac{\pi^2 \lambda^2}{6} + o_{\lambda \rightarrow 0}(\lambda^2) \right)$$

Exercice 3 : 1. $a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = 0$ pour tout $n \geq 0$ car $x \mapsto g(x) \cos(nx)$ est impaire et $b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$ pour tout $n \geq 1$ car $x \mapsto g(x) \sin(nx)$ est paire. Puis en utilisant une intégration par parties on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\pi \cdot \frac{-(-1)^n}{n} - 0 \right) - \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{-2(-1)^n}{n} - 0 = \frac{-2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

De même pour h on a $a_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(nx) dx = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \sin(nx) dx$ pour tout $n \geq 1$ ce qui donne par intégrations par parties pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n(h) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(x^2 - \pi^2) \cdot \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[x(x^2 - \pi^2) \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x^2 - \pi^2) \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} dx \\ &= 0 - \frac{2}{\pi} \left[(3x^2 - \pi^2) \cdot \frac{-\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 6x \cdot \frac{-\sin(nx)}{n^2} dx = 0 - \frac{6}{n^2} b_n(g) = \frac{12(-1)^n}{n^3} \end{aligned}$$

2. Puisque g est 2π périodique, intégrable et de carré intégrable sur $]-\pi, \pi[$, elle vérifie la formule de Bessel-Parseval : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx = \frac{a_0(g)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g)^2 + b_n(g)^2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3} \\ &= \frac{0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(0^2 + \left(\frac{-2(-1)^n}{n} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. De même pour h on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)^2 dx &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 (x^2 - \pi^2)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x^6 - 2\pi^2 x^4 + \pi^4 x^2) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^7}{7} - 2\pi^2 \frac{x^5}{5} + \pi^4 \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^7}{\pi} \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{8\pi^6}{105} \\ &= \frac{0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(0^2 + \left(\frac{12(-1)^n}{n^3} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{144}{n^6} = 72 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

3. En utilisant la linéarité de l'intégrale (et donc des coefficients de Fourier) on obtient pour $h + \pi^2 g = (x \mapsto x^3)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (h(x) + \pi^2 g(x))^2 dx &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x^6 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^6}{7} \\ &= \frac{a_0(h + \pi^2 g)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left((a_n(h + \pi^2 g))^2 + (b_n(h + \pi^2 g))^2 \right) \\ &= \frac{a_0(h) + \pi^2 a_0(g)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left((a_n(h) + \pi^2 a_n(g))^2 + (b_n(h) + \pi^2 b_n(g))^2 \right) \\ &= \frac{0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(0^2 + \left(\frac{12(-1)^n}{n^3} + \pi^2 \frac{-2(-1)^n}{n} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{144}{n^6} + 2\pi^2 \frac{-24}{n^4} + \pi^4 \frac{4}{n^2} \right) = 72 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} - 24\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + 2\pi^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

La dernière égalité étant justifiée car chacune des trois sommes converge (séries de Riemann). On en déduit en utilisant les résultats précédents que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{24\pi^2} \left(72 \frac{\pi^6}{945} + 2\pi^4 \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^6}{7} \right) = \frac{\pi^6}{\pi^2} \left(\frac{1}{315} + \frac{1}{72} - \frac{1}{168} \right) = \frac{\pi^4}{90}$.