Université de Cergy-Pontoise **2009-2010**
Compléments d'Analyse

Contrôle continu n° 2
Corrections

Exercice 1 : Si $x \in int(A \cap B)$ alors $\exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \cap B$ en particulier $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$ donc $x \in$ *int(A)* et $int(A \cap B) \subset$ *int(A)*. De même $int(A \cap B) \subset$ *int(B)* et donc $int(A \cap B) \subset int(A) \cap int(B)$. Si $x \in int(A) \cap int(B)$ alors $\exists \varepsilon_1 > 0,]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset A$ et $\exists \varepsilon_2 > 0,]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset B$. Ainsi pour $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ on a $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset A$ et $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset B$ c'est à dire $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \cap B$ donc $x \in int(A \cap B)$ et $int(A) \cap int(B) \subset int(A \cap B)$. Finalement $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$. Soit maintenant $x \in int(A)$. Alors $\exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$ en particulier $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \cup B$ donc $x \in int(A \cup B)$ et $int(A) \subset int(A \cup B)$. De même $int(B) \subset int(A \cup B)$ et donc $int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B)$. L'inclusion réciproque est fausse. Contre-exemple : $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$ alors $int(A \cup B) = int([0,2]) =]0,2[$ et $int(A) \cup int(B) =]0,1[\cup]1,2[$, donc $int(A \cup B) \not\subset int(A) \cup int(B)$.

Exercice 2 : On fixe $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3^k} < \varepsilon$ c'est à dire tel que $k > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(3)}$ (par exemple $k = \max\{0, E[\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(3)}] + 1\}$) puis $p = E[3^k x] \in \mathbb{Z}$. Alors $3^k x - 1 < p \leqslant 3^k x$ par définition de la partie entière et donc $x - \varepsilon < x - \frac{1}{3^k} < \frac{p}{3^k} \leqslant x < x + \varepsilon$ car $0 < \varepsilon < \frac{1}{3^k}$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \exists d = \frac{p}{3^k} \in D / d \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ ce qui prouve le résultat.

Exercice 3 : Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact, c'est à dire tel que toute suite (u_n) de K admette une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente dans K, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall (u_n) \in K^{\mathbb{N}}, \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strict. croissante}/\exists \ell \in K / \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N_1, |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$$

On veut montrer que K est complet, c'est à dire que toute suite de Cauchy de K converge dans K. On se donne donc (u_n) une suite de Cauchy de K, c'est à dire telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} / \forall p, q \geqslant N_2, |u_p - u_q| < \varepsilon$$

On fixe $\varepsilon > 0$. On utilise le critère de compacité de K et le critère de Cauchy de (u_n) pour $n = p \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$ et $q = \varphi(n)$. On a bien $q \geqslant N_2$ (et évidemment $n \geqslant N_1$ et $p \geqslant N_2$) car on peut montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \geqslant k$ (en utilisant la croissance stricte de φ) et donc $q = \varphi(n) \geqslant n \geqslant N \geqslant N_2$. Puis on utilise une inégalité triangulaire : $|u_n - \ell| \leqslant |u_p - u_q| + |u_{\varphi(n)} - \ell| < 2\varepsilon$. Ainsi, en posant $\varepsilon = \varepsilon'/2$ on a obtenu :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon'$$

C'est exactement la définition de la convergence de (u_n) vers $\ell \in K$. Par conséquent, toute suite de Cauchy de K converge dans K, ce qui prouve la complétude de K.