Université de Cergy-Pontoise **2009-2010**
Compléments d'Analyse

Contrôle continu n$^{\text{o}}$ 1
(durée : 1h)

Exercice 1 : Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$ telle que $\forall n, |u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En rappelant précisement la définition du critère de Cauchy, montrer que (u_n) est de Cauchy.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite de $\mathbb{Z}$. En rappelant précisement la définition de suite extraite, montrer que (u_n) admet une suite extraite dont tous les termes ont même parité (c'est à dire dont tous les termes sont pairs ou tous les termes sont impairs).

Exercice 3 : Soit A une partie non vide et majorée de $]0, +\infty[$. En rappelant précisement la définition de borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, montrer que $A^{-1} = \{\frac{1}{a}, a \in A\}$ admet une borne inférieure et que $\inf(A^{-1}) = \frac{1}{\sup(A)}$.

Exercice 4 : En rappelant précisement la définition d'une partie dense de $\mathbb{R}$, montrer que $D = \{\frac{p}{q^2}, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Rappeler la définition de la limite supérieure d'une suite de réels et donner un exemple de suite non convergente mais telle que sa limite supérieure soit égale à 1 (la justification n'est pas nécessaire).