Université de Cergy-Pontoise **2009-2010**
Compléments d'Analyse

Contrôle continu n^o 1
Corrections

Exercice 1 : (u_n) vérifie le critère de Cauchy si $\forall\epsilon>0, \exists N/\forall n\geqslant N, \forall k\geqslant 0, |u_{n+k}-u_n|\leqslant\epsilon$.

On fixe $\epsilon>0$. Pour $n\geqslant 0$ et $k\geqslant 0$ on a par inégalité triangulaire : $|u_{n+k}-u_n|\leqslant|u_{n+k}-u_{n+k-1}|+|u_{n+k-1}-u_{n+k-2}|+\cdots+|u_{n+1}-u_n|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{1-\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. De plus $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\epsilon\Leftrightarrow n>\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(1/2)}+1$ d'où le résultat en posant $N=E\left[\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(1/2)}+1\right]+1$.

Exercice 2 : Une suite extraite de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ est strictement croissante.

On pose $\mathcal{P}=\{n\in\mathbb{N}/u_n \text{ est pair}\}$ et $\mathcal{I}=\mathbb{N}\backslash\mathcal{P}=\{n\in\mathbb{N}/u_n \text{ est impair}\}$. Si $\mathcal{P}$ est infini alors on définit par récurrence une application $\varphi:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ par :

(i) $\varphi(0)=\min\mathcal{P}$;

(ii) $\varphi(n+1)=\min\left(\mathcal{P}\backslash\{\varphi(0),\varphi(1),\ldots,\varphi(n)\}\right)$.

φ est bien définie comme minima de sous-ensembles non vides (car $\mathcal{P}$ est infini) de $\mathbb{N}$. De plus, φ est strictement croissante par construction (car $\varphi(n+1)\in\mathcal{P}\backslash\{\varphi(0),\ldots,\varphi(n)\}\subset\mathcal{P}\backslash\{\varphi(0),\ldots,\varphi(n-1)\}$ donc $\varphi(n+1)\neq\varphi(n)$ et $\varphi(n)=\min\left(\mathcal{P}\backslash\{\varphi(0),\ldots,\varphi(n-1)\}\right)\leqslant\varphi(n+1)$). On a donc construit une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ dont tous les termes sont pairs car $\varphi(n)\in\mathcal{P}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si maintenant $\mathcal{P}$ est fini alors $\mathcal{I}=\mathbb{N}\backslash\mathcal{P}$ est infini et on peut construire une suite extraite dont tous les termes sont impairs en procédant de même.

Exercice 3 : m est la borne inférieure d'une partie B de $\mathbb{R}$ si :

(i) $\forall b\in B, m\leqslant b$;

(ii) $\forall\epsilon>0, \exists b\in B/m\leqslant b\leqslant m+\epsilon$.

Puisque A est une partie majorée de $\mathbb{R}$, A admet une borne supérieure $M=\sup(A)$. Pour tout $b=\frac{1}{a}\in A^{-1}$ on a $a\leqslant M$ (car $a\in A$) et donc $b\geqslant\frac{1}{M}$. En particulier A^{-1} est une partie minorée de $\mathbb{R}$ et par conséquent admet une borne inférieure. De plus, on a prouvé (i) pour $m=\frac{1}{M}$ et il reste à montrer (ii). On fixe $\epsilon>0$ et on cherche un $b=\frac{1}{a}\in A^{-1}$ tel que $m\leqslant\frac{1}{a}\leqslant m+\epsilon$ c'est à dire un $a\in A$ tel que $M=\frac{1}{m}\geqslant a\geqslant\frac{1}{m+\epsilon}$ (car tout est strictement positif). Or $\forall\epsilon'>0, \exists a\in A/M\geqslant a\geqslant M-\epsilon'$ car M est la borne supérieure de A. En posant $\epsilon'=M-\frac{1}{m+\epsilon}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+\epsilon}>0$, on obtient alors un $a\in A$ et donc aussi un $b=\frac{1}{a}\in A^{-1}$ qui conviennent.

Exercice 4 : D est dense dans $\mathbb{R}$ si $\forall x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, \exists d\in D/x-\epsilon\leqslant d\leqslant x+\epsilon$.

On fixe $x\in\mathbb{R}$ et $\epsilon>0$. On choisit $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q^2}<\epsilon$ c'est à dire tel que $q>\sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$ (par exemple $q=E[\sqrt{\frac{1}{\epsilon}}]+1$) puis $p=E[q^2x]\in\mathbb{Z}$. Alors $q^2x-1<p\leqslant q^2x$ par définition de la partie entière et donc $x-\epsilon<x-\frac{1}{q^2}<\frac{p}{q^2}\leqslant x<x+\epsilon$ car $0<\epsilon<\frac{1}{q^2}$. Ainsi $d=\frac{p}{q^2}\in D$ prouve le résultat.

Exercice 5 : La limite supérieure de la suite (u_n) est définie par $\ell=\limsup u_n=\inf_{N\in\mathbb{N}}\sup_{n\geqslant N}u_n$, ou comme étant la plus grande valeur d'adhérence de (u_n) ou encore par :

(i) $\forall\epsilon>0, \forall N, \exists n\geqslant N/\ell-\epsilon\leqslant u_n\leqslant\ell$;

(ii) $\forall\epsilon>0, \exists N/\forall n\geqslant N, u_n\leqslant\ell+\epsilon$.

Des exemples de suites non convergentes dont la limite supérieure vaut 1 : $(-1)^n$, $\cos(n)$, $\sin(n)$, $1-\frac{1}{n}$ si n est pair et 0 sinon, 2 si $n\leqslant 10$ et $(-1)^n$ sinon, …