Université de Cergy-Pontoise **L2 S4**
Algèbre linéaire **2009-2010**

TD n^o 2
Applications linéaires et matrices - Changements de bases

Changements de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ des bases de E. On note $M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire la matrice des coordonnées des vecteurs de $\tilde{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}$. On rappelle que si v est un vecteur de E, de coordonnées X dans $\mathcal{B}$ et $\tilde{X}$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$, alors

$$X = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{X}$$

Exercice 1 : **(cours)** Rappeler la formule de changement de bases pour les endomorphismes.

Exercice 2 : Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de passage $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Exercice 3 : Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'espace E à trois dimensions sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Id_E désigne l'application identique de E. On considère l'application linéaire f de E dans E telle que : $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $\quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$, $\quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Donner la dimension et une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Donner la dimension et une base de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

Exercice 4 : Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par $f(u) = u$, $f(v) = 2v$ et $f(w) = -3w$.

1. Pourquoi f est-il bien défini ?
2. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\{u, v, w\}$ puis dans la base canonique.

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Existe-t-il un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$, ayant pour matrices $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & a \\ 2 & -1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une autre base ?

Exercice 7 : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques (E_1, E_2, E_3, E_4) et (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On définit deux nouvelles bases :

$$\mathcal{B} = (E_1, E_2, 4E_1 + E_2 - 3E_4, -7E_1 + E_3 + 5E_4) \text{ et } \mathcal{B}' = (4e_1 + 2e_2 + e_3, 5e_1 + e_2 - e_3, e_3)$$

Quelle est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?

Exercice 8 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f dans (e_1, e_2).
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$$

Déterminant et rang : calculs

Exercice 9 : Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce réésultat vaut-il encore pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 10 : Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 : Calculer les déterminants suivants. (a et b sont deux réels distincts).

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

Exercices divers sur les matrices

Exercice 12 : Soit :

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \frac{1}{2}(A - {}^tA) \end{aligned}$$

Vérifier que F est linéaire, déterminer le noyau, le rang et l'image de F.

Exercice 13 : Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA$$

Exercice 14 : Soient I la matrice identité de $\mathbb{R}^3$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $J^2 - J - 2I = 0$. En déduire que J est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $n \geqslant 3$. Par la division euclidienne sur les polynômes, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ et un polynôme P_n tels que $X^n = P_n(X)(X^2 - X - 2) + a_n X + b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Trouver a_n et b_n. En déduire J^n.

Exercice 15 : Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \quad \text{trace}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 16 : Etant données deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application f par $f(X) = X - \text{Tr}(AX)B$, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endormorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $\text{Tr}(AB) = 1$, montrer que f est un projecteur. Déterminer dans ce cas le noyau et l'image de f. Quel est le rang de f ?
3. Sous quelle condition f est-elle bijective ?

Exercice 17 : Soit M une matrice $n \times n$ antisymétrique. Montrer que $I_n + M$ est inversible.