**Université de Cergy-Pontoise** **L2 S4**
**Algèbre linéaire** **2009-2010**

# TD n° 1
# Espaces vectoriels et applications linéaires

**Exercice 1 :** Soient $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tels que

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ z-x \end{pmatrix}$$

Justifier que $f$ et $g$ sont des applications linéaires. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

**Exercice 2 :** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit un endomorphisme $f$ par $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$. Déterminer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

**Exercice 3 :** Soit $E$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application $\Phi$ par $\Phi(f) = f + f'$. Montrer que c'est un endomorphisme et trouver son noyau et son image. Sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 4 :** Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\Phi(x, y, z) = (2x + y, y - z)$$

Ecrire la matrice de $\Phi$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$. Soient

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $(f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de $\Phi$ avec $(f_1, f_2, f_3)$ comme base de départ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ comme base d'arrivée.

**Exercice 5 :** Soit $E$ un e.v. de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $f$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice dans cette base est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires $F$ et $G$ de $E$ stables par $f$ et tels que

$$\forall x \in F,\ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ f(x) = -x$$

En déduire que $f$ est une symétrie.

**Exercice 6 :** Soient $n \geqslant 1$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, $n+1$ nombres réels. On considère les polynômes

$$U_j(X) = \prod_{\substack{k=0,\dots,n \\ k \neq j}} (X - a_k) \quad \text{où } j = 0, \dots, n$$

Montrer que $(U_j)_{j=0,\dots,n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées de $P$ dans la base $\big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\big)$.

**Exercice 7 :** Soit $e_\lambda$ la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 8 :** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$, et $f : E \to E$ définie par $f(P) = P + (1-X)P'$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

**Exercice 9 :** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces d'un espace vectoriel $E$, réel ou complexe, que l'on suppose de dimension finie. On considère l'application $f$ de $F\times G$ dans $E$, définie par $f(x,y) = x+y$. Vérifier que $f$ est linéaire et trouver son image et son noyau. En déduire une formule bien connue pour $\dim(F+G)$.

**Exercice 10 :** Soit $u$ un endomorphisme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Montrer que si $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$, alors la dimension de $E$ est paire.

**Exercice 11 :** Soit $E$, $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que si $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \mathrm{Ker}\, f)$. Montrer que si $K$ est un sous-espace vectoriel de $F$, alors $\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$.

**Exercice 12 :** Soient $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $k \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u^k = 0$. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et calculer son inverse. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^4 + 3v + \mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que $v$ est inversible et donner son inverse.

**Exercice 13 :** Soit $E$ un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$$

**Exercice 14 :** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f$ une application linéaire sur $E$. Montrer

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \quad &\Longleftrightarrow \quad E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

**Exercice 15 :** Soit $E$ un espace vectoriel. Un endomorphisme $p$ est appelé un *projecteur* si $p\circ p = p$. Soit $p$ un projecteur. Montrer que $x \in \mathrm{Im}(p)$ si et seulement si $p(x) = x$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. Soient $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$, montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q = q\circ p = 0$, et montrer que dans ce cas $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$.

**Exercice 16 :** Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie et $a$, $b$ deux scalaires distincts. On suppose $(f - a\,\mathrm{Id}_E)\circ(f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires. On pourra remarquer que

$$\mathrm{Id}_E = \frac{1}{b-a}\big[(f - a\,\mathrm{Id}_E) - (f - b\,\mathrm{Id}_E)\big]$$

En déduire qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - b\,\mathrm{Id}_E)$. A quel types d'applications linéaires correspondent les cas ($a = 1$, $b = 0$) et ($a = 1$, $b = -1$) ?