Université de Cergy-Pontoise **L2 S4**
Algèbre linéaire **2009-2010**

TD n° 0
Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 : On considère l'ensemble des matrices symétriques $S_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, A = {}^tA\}$
Justifier que c'est un espace vectoriel. En donner une base et la dimension.
Si on pose $H_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, A = \overline{{}^tA}\}$ (ensemble des matrices hermitiennes), est-ce un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Dimension ? Est-ce un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 2 : Soit W_1 et W_2 deux s.e.v. d'un e.v. E. Démontrer que $W_1 \cup W_2$ est un s.e.v. seulement dans le cas où $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$. Quel est le plus petit s.e.v. qui contient $W_1 \cup W_2$?
Montrer que si W_1 et W_2 sont deux s.e.v. d'un e.v. E, alors $W_1 \cap W_2$ est toujours un s.e.v.

Exercice 3 : Sont-ce des e.v. :

1. L'ensemble des suites.
2. L'ensemble des suites convergentes.
3. l'ensemble des suites convergentes vers 1.
4. L'esemble des fonctions tendant vers 0 en $+\infty$.
5. L'ensemble des séries convergentes.
6. L'ensemble des séries convergentes à termes positifs.
7. L'ensemble des séries divergentes.
8. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
9. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
10. L'ensemble des suites vérifiant : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Exercice 4 : Montrer que $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (0, -3, 2)$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de la base canonique dans cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 5 : Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$E = \{x = (x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
Soit E' le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E' = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de E'.

Exercice 6 : Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f(x, y) = 2x - 3y$
2. $g(x, y) = xy$
3. $h(x, y) = x$
4. $k(x, y) = 5$
5. $\ell(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dire lesquelles sont linéaires et décrire leurs surfaces représentatives (c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace de la forme $M\big(x, y, f(x, y)\big)$).