Université de Cergy-Pontoise **L2 S4**
Algèbre linéaire **2009-2010**

Contrôle continu n$^{\mathrm{o}}$ 2
45 minutes

Exercice 1 : (cours) Rappeler les définitions de valeurs propres et d'espaces propres associés pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Exercice 2 : (cours) Donner au moins une condition suffisante pour qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.

Exercice 3 : On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Calculer son déterminant (on pourra commencer par se ramener à une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ en factorisant chaque ligne ou chaque colonne du déterminant).

Exercice 4 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -4 \\ -8 & 9 & -4 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. En déduire que 1 et -3 sont les seules valeurs propres de f et donner leur multiplicité.
3. Trouver une base des espaces propres associés E_1 et E_{-3}.
4. f est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer la matrice de f^n dans la base canonique pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.