Université de Cergy-Pontoise **L2 S4**
Algèbre linéaire **2009-2010**

Contrôle continu n° 2
Corrigé

Exercice 1 : (cours) $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ si

$$\exists x \in E - \{0\} \,/\, f(x) = \lambda x$$

L'espace propre associé à la valeur propre λ est le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel suivant

$$E_\lambda = \{x \in E \,/\, f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$$

Exercice 2 : (cours) Pour qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable, il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

- la matrice M est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire :

$$\exists P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}) \,/\, P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- le polynôme caractéristique $\chi_M(X) = \det(M - XI_n) \in \mathbb{R}_n[X]$ de M est scindé à racines simples
- le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de M est scindé et la multiplicité de chaque racine est égale à la dimension de l'espace propre associé
- la matrice M est symétrique : $M = {}^tM$
- ...

Exercice 3 : On commence par mettre au même dénominateur chaque ligne du déterminant.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6}{12} & \frac{4}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{20}{60} & \frac{15}{60} & \frac{12}{60} \\ \frac{15}{60} & \frac{12}{60} & \frac{10}{60} \end{vmatrix} = \frac{1}{12 \times 60 \times 60} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \\ 15 & 12 & 10 \end{vmatrix}$$

Ensuite on utilise les opérations élémentaires sur les lignes.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \\ 15 & 12 & 10 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{10}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2}L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{6}{5}L_1 \end{matrix} \\ &= \left(6 \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{10}\right) = 1 \end{aligned}$$

Donc $\det(M) = 1/(12 \times 60^2) = 1/43200$

Exercice 4 : 1. On calcule le polynôme caractéristique de f en développant le déterminant de $M - XI_3$ par rapport à la première colonne.

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} -7-X & 8 & -4 \\ -8 & 9-X & -4 \\ -8 & 8 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= (-7-X)\begin{vmatrix} 9-X & -4 \\ 8 & -3-X \end{vmatrix} - (-8)\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -8 & -3-X \end{vmatrix} + (-8)\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 9-X & -4 \end{vmatrix} \\ &= (-7-X)[(9-X)(-3-X) - 8(-4)] + 8[8(-3-X) - (-8)(-4)] - 8[8(-4) - (9-X)(-4)] \\ &= (-7-X)[X^2 - 6X + 5] + 8[-8X + 8] - 8[-4X + 4] \\ &= (-X^3 - X^2 + 37X - 35) + (-64X + 64) + (32X - 32) \\ &= -X^3 - X^2 + 5X - 3 \end{aligned}$$

2. 1 est une racine du polynôme caractéristique de f car $\chi_f(1) = -1 - 1 + 5 - 3 = 0$. On peut donc factoriser $\chi_f(X)$ par $X - 1$:

$$\begin{aligned}\chi_f(X) = -X^3 - X^2 + 5X - 3 &= (X-1)(-X^2 - 2X + 3) \\ &= (X-1)(X-1)(X+3) = (X-1)^2(X+3)\end{aligned}$$

Ainsi 1 et -3 sont les seules valeurs propres de f, 1 est de multiplicité deux alors que -3 est simple.

3. Pour trouver une base de vecteurs propres de E_1, on résoud le système linéaire correspondant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} -7x+8y-4z &=& x \\ -8x+9y-4z &=& y \\ -8x+8y-3z &=& z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -8x+8y-4z &=& 0 \\ -8x+8y-4z &=& 0 \\ -8x+8y-4z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -8x+8y-4z = 0 \Leftrightarrow z = -2x+2y$$

Ainsi E_1 est de dimension 2 (c'est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$) et tout couple de vecteurs non colinéaires de E_1 forme une base. Par exemple

$$E_1 = \text{Vect}\left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

On procède de même pour E_{-3} :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{rcl} -7x+8y-4z &=& -3x \\ -8x+9y-4z &=& -3y \\ -8x+8y-3z &=& -3z \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -4x+8y-4z &=& 0 \\ -8x+12y-4z &=& 0 \\ -8x+8y &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -4x+8y-4z &=& 0 & L_1 \leftarrow L_1 \\ -4x+4y &=& 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -8x+8y &=& 0 & L_3 \leftarrow L_3 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z &=& -x+2y \\ y &=& x \end{array}\right. \Leftrightarrow z = y = x\end{aligned}$$

Ainsi E_{-3} est de dimension 1 (c'est une droite vectoriel de $\mathbb{R}^3$) et tout vecteur directeur de E_{-3} forme une base. Par exemple

$$E_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. On a $\dim(E_1) = 2$ et $\dim(E_{-3}) = 1$ donc f est diagonalisable puisque son polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé et la multiplicité de chaque racine est égale à la dimension de l'espace propre associé.

5. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ vers la base canonique, c'est-à-dire la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs u, v et w écrits dans la base canonique.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque f est diagonalisable, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale, c'est-à-dire :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = D$$

La matrice de f^n dans la base canonique est donc donnée par :

$$M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

On calcule l'inverse de la matrice P par des méthodes classiques.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on obtient finalement :

$$M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 2 - 2(-3)^n & (-3)^n - 1 \\ 2(-3)^n - 2 & 3 - 2(-3)^n & (-3)^n - 1 \\ 2(-3)^n - 2 & 2 - 2(-3)^n & (-3)^n \end{pmatrix}$$