Université de Cergy-Pontoise **L2 S4**
Algèbre linéaire **2009-2010**

Contrôle continu n^{o} 1
1 heure

Exercice 1 : **(cours)** Rappeller les définitions de familles libres et génératrices.

Exercice 2 : **(cours)** Rappeller les définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = \mathrm{Id}$.

1. Donner $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer les égalités d'ensembles suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id})) &= \mathrm{Ker}(\frac{1}{2}(f-\mathrm{Id})) \\ \mathrm{Im}(\frac{1}{2}(f-\mathrm{Id})) &= \mathrm{Ker}(\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id})) \end{aligned}$$

Exercice 4 : Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, P(0) = P'(0) = 0\}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, P(1) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $\forall P \in F, \exists Q \in \mathbb{R}_1[X] / \, P(X) = (X-1)^2 Q(X)$.
3. En déduire que $((X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de F.
4. De même, déterminer une base de E.
5. Démontrer que $E \oplus F = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$M = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -10 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ayant pour coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. A quel ensemble de matrices remarquables appartient D ? Que peut-on en déduire pour f ?