# Contrôle continu n° 1

**Exercice 1 : (cours)** Une famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de $n$ vecteurs d'un espace vectoriel $E$ est libre si $\forall(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \lambda_k = 0)$. Et $\mathcal{F}$ est génératrice dans $E$ si $\forall u \in E, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$.

**Exercice 2 : (cours)** Soit $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathrm{Im}(f) = \{x \in E/ \quad \exists y \in E/x = f(y)\}$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E/ \quad f(x) = 0\}$.

**Exercice 3 :**

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $x = \mathrm{Id}(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Et d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - 0 = \dim(E)$, on en déduit $\mathrm{Im}(f) = E$.
2. Soit $x \in \mathrm{Im}(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}))$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{2}(f(y) + y)$ où $y \in E$. Alors $f(x) = f\left(\frac{1}{2}(f(y) + y)\right) = \frac{1}{2}(f(f(y)) + f(y)) = \frac{1}{2}(y + f(y)) = x$. En particulier $\frac{1}{2}(f - \mathrm{Id})(x) = \frac{1}{2}(f(x) - x) = 0$ et donc $\mathrm{Im}(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id})) \subset \ker(\frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}))$. Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}(\frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}))$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(f(x) - x) = 0$ ou encore $f(x) = x$. En particulier $x = \frac{1}{2}(x + x) = \frac{1}{2}(f(x) + x) = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id})(x)$. Donc $\ker(\frac{1}{2}(f - \mathrm{Id})) \subset \mathrm{Im}(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}))$ et on en déduit la première égalité. Pour la deuxième égalité, il suffit de poser $g = -f$ et de remarquer que $g \circ g = -(-(f \circ f))) = \mathrm{Id}$, $\mathrm{Im}(\frac{1}{2}(g - \mathrm{Id})) = \mathrm{Im}(\frac{1}{2}(-f - \mathrm{Id})) = \mathrm{Im}(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}))$ et $\mathrm{Ker}(\frac{1}{2}(g + \mathrm{Id})) = \mathrm{Ker}(\frac{1}{2}(-f + \mathrm{Id})) = \mathrm{Ker}(-\frac{1}{2}(f - \mathrm{Id})) = \mathrm{Ker}(\frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}))$.

**Exercice 4 :**

1. Le polynôme nul appartient bien aux ensembles $E$ et $F$. De plus, $E$ et $F$ sont stables par combinaison linéaire car : $\forall(\lambda, \tilde{\lambda}) \in \mathbb{R}^2, \forall P, \tilde{P} \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda P + \tilde{\lambda}\tilde{P})(x) = \lambda P(x) + \tilde{\lambda}\tilde{P}(x)$. $E$ et $F$ sont donc bien des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Puisque $P(1) = 0$, il existe $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(X) = (X-1)R(X)$. Ce qui donne en dérivant : $P'(X) = R(X) + (X-1)R'(X)$. Or $P'(1) = 0$ donc $R(1) = 0$ et donc il existe $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $R(X) = (X-1)Q(X)$. Finalement $P(X) = (X-1)R(X) = (X-1)^2 Q(X)$.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a(X-1)^2 + b(X-1)^3 = 0$. En prenant $X = 0$ et $X = 2$ on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a - b & = & 0 \\ a + b & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right.$$

   La famille est donc libre. De plus, d'après la question précédente pour tout $P \in F$ il existe $Q(X) = (aX + b) \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que : $P(X) = (X-1)^2(aX + b) = (X-1)^2(aX - a + a + b) = a(X-1)^3 + (a+b)(X-1)^2$. La famille est donc génératrice. Et finalement, c'est bien une base de $F$.
4. Prouvons que $(X^2, X^3)$ est une base de $E$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aX^2 + bX^3 = 0$. En prenant $X = 1$ et $X = -1$ on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a + b & = & 0 \\ a - b & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right.$$

   La famille est donc libre. Pour tout $P \in E$ on a $P(0) = 0$ donc il existe $R \in \mathbb{R}_{2[X]}$ tel que $P(X) = XR(X)$. Ce qui donne en dérivant : $P'(X) = R(X) + XR'(X)$. Or $P'(0) = 0$ donc $R(0) = 0$ et donc il existe $Q(X) = (aX + b) \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $R(X) = XQ(X)$. Finalement $P(X) = XR(X) = X^2 Q(X) = X^2(aX + b) = aX^3 + bX^2$. La famille est donc génératrice. Et finalement, c'est bien une base de $E$.

5. Soit $P \in E \cap F$. Puisque $P \in E$ et que $(X^2, X^3)$ est une base de E, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(X) = aX^2 + bX^3$. Or $P \in F$, en particulier $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$, ce qui donne le système d'équations suivant :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} a+b & = & 0 \\ 2a+3b & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array} \right.$$
On en déduit que $E \cap F = \{0\}$. De plus $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 0 = 4$ et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Donc $E + F = \mathbb{R}_3[X]$ et finalement $E \oplus F = \mathbb{R}_3[X]$.

**Exercice 5 :** 1. La matrice composée des vecteurs colonnes $u$, $v$ et $w$ dans $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut (en développant par rapport à la première colonne) :

$$\det(P) = 1.(1.1 - 1.0) - 2.(1.1 - 1.1) + 0.(1.0 - 1.1) = 1 \neq 0$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

2. D'après la formule de changement de bases : $D = P^{-1}MP$. On commence par calculer $P^{-1}$ (méthode des cofacteurs, méthode du pivot de Gauss, etc...) puis on calcule successivement les produits de matrices :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}MP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -10 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $D$ est une matrice diagonale et par conséquent l'endomorphisme $f$ est diagonalisable.