Université de Cergy-Pontoise **Semestre 1**
Sciences de la vie **2008-2009**

Corrections du contrôle continu n° 1

Exercice 1 : On écrit l'expression du deuxième degré sous sa forme canonique : $z^2 - 2\imath z + 5 = (z^2 - 2\imath z + \imath^2) - \imath^2 + 5 = (z - \imath)^2 - (-1) + 5 = (z - \imath)^2 + 6$. Par conséquent l'équation $z^2 - 2\imath z + 5 = 0$ est équivalente à $(z - \imath)^2 = -6$. Ainsi $(z - \imath) = \imath\sqrt{6}$ ou $-\imath\sqrt{6}$ et donc $z = \imath\left(1 + \sqrt{6}\right)$ ou $-\imath\left(1 + \sqrt{6}\right)$.

Exercice 2 :

1. 1$^{\text{er}}$ cas : $x \leqslant -5$. Ainsi $x - 4 \leqslant -5 - 4 \leqslant -9 \leqslant 0$ et $x + 5 \leqslant 0$, donc : $|x - 4| < |x + 5| \Leftrightarrow -(x - 4) < -(x + 5) \Leftrightarrow -x + 4 < -x - 5 \Leftrightarrow 4 < -5$ ce qui est absurde.
   2$^{\text{e}}$ cas : $-5 \leqslant x \leqslant 4$. Ainsi $x - 4 \leqslant 0$ et $x + 5 \geqslant 0$, donc : $|x - 4| < |x + 5| \Leftrightarrow -(x - 4) < x + 5 \Leftrightarrow -x + 4 < x + 5 \Leftrightarrow 4 - 5 < 2x \Leftrightarrow -1 < 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x$.
   3$^{\text{e}}$ cas : $4 \leqslant x$. Ainsi $x - 4 \geqslant 0$ et $x + 5 \geqslant 4 + 5 \geqslant 9 \geqslant 0$, donc : $|x - 4| < |x + 5| \Leftrightarrow x - 4 < x + 5 \Leftrightarrow -4 < 5$ ce qui est vrai pour tout $x \geqslant 4$.
   Finalement $-\frac{1}{2} < x \leqslant 4$ ou $4 \leqslant x$ c'est à dire $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
2. On a $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geqslant 0 + 1 \geqslant 0$ donc $\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)^2 = x^2 + 2x + 2$ et en utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$: $\sqrt{x^2 + 2x + 2} \leqslant x + 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 \leqslant (x + 8)^2 = x^2 + 2.8x + 8^2 = x^2 + 16x + 64 \Leftrightarrow 2 - 64 \leqslant (16 - 2)x \Leftrightarrow -62 \leqslant 14x \Leftrightarrow -\frac{62}{14} = -\frac{31}{7} \leqslant x$.

Exercice 3 :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = 1\frac{1}{1} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^3 + 5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2}{x^2(x+5)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{(x+5)} = (1)^2 \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5}$
3. On commence par multiplier par les quantités conjuguées puis on factorise par $(x - 2)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - 1) - (2x - 1)}{(x + 2) - (x^2 + 2x - 4)} \frac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 4}}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2x - 1}} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{-x^2 - x + 6} \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 4}}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2x - 1}} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)x}{(x - 2)(-x - 3)} \frac{\sqrt{2 + 2} + \sqrt{2^2 + 2.2 - 4}}{\sqrt{2^2 - 1} + \sqrt{2.2 - 1}} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x}{-x - 3} \frac{2 + 2}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{2}{-2 - 3} \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{-5} \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{15}
\end{aligned}$$

Exercice 4 : On calcule la dérivée de f comme un quotient de deux polynômes :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2 - 40x + 36)(2x - 4) - (x^3 - 20x^2 + 36x - 72)(2)}{(2x - 4)^2} \\
&= \frac{(6x^3 - 92x^2 + 232x - 144) - (2x^3 - 40x^2 + 72x - 144)}{(2(x - 2))^2} \\
&= \frac{4x^3 - 52x^2 + 160x}{4\,(x - 2)^2} = \frac{x(x^2 - 13x + 40)}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 5)(x - 8)}{(x - 2)^2}
\end{aligned}$$

On en déduit les variations de f en étudiant le signe de f' : f est croissante sur $[0, 2[\cup]2, 5] \cup [8, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0] \cup [5, 8]$.