Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
PCST S1

Devoir maison n° 3

Exercice 1 : 1. A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \ln^3(x)dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-1}^3 \sqrt{3+2x-x^2}dx \tag{1}$$

2. Retrouver I_2 en remarquant que $2I_2$ est l'aire d'un disque du plan euclidien dont vous préciserez l'équation.

Exercice 2 : 1. Au moyen de changements de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)\,(1-\tan(x))}{\cos^2(x)}dx \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos(x)}$$

2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{2-\cos(x)}$, sa tangente T au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$, et les axes verticaux d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ (on admettra que $\mathcal{C}$ se situe au-dessus de T entre ces deux axes verticaux).

Exercice 3 : 1. En décomposant les fractions rationnelles en éléments simples, calculer les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{x^2(x-1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx \quad \text{et} \quad K_2 = \int_1^4 \frac{x(x+8)}{(x^2-2x+10)^2}dx$$

2. Calculer le volume du solide $S = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / \sqrt{y^2+z^2} \leqslant \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Exercice 4 : (Intégrales de Wallis) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$$

Le but de l'exercice est de donner un équivalent de ces intégrales quand n tend vers $+\infty$. On démontrera aussi une formule donnant une approximation de π par un produit de nombres rationnels.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
2. En déduire par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad W_{2p} = \frac{(2p-1).(2p-3)\ldots 3.1}{2p.(2p-2)\ldots 4.2}.\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2p.(2p-2)\ldots 4.2}{(2p+1).(2p-1)\ldots 3.1}$$

3. Montrer que $W_{2p+1} \leqslant W_{2p} \leqslant W_{2p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puis que $\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1$.
4. A l'aide des deux questions précédentes, démontrer la formule de Wallis :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{2p.(2p-2)\ldots 4.2}{(2p-1).(2p-3)\ldots 3.1}\right)^2 = \pi$$

5. En déduire que $W_{2p} \sim W_{2p+1} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ (lorsque $p \to +\infty$) et donc que

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Exercice 5 : (Intégrale de Gauss) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$G(n) = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

Le but de l'exercice est de montrer que $G(n)$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers une limite notée $G = \lim_{n\to+\infty} G(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et de calculer cette limite. On utilisera à la dernière question le résultat de l'exercice précédent (l'équivalent des intégrales de Wallis).

1. Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right[, \quad \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n} \leqslant -\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$$

   puis que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant G(n) \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

3. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x) dx \leqslant \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x) dx = \sqrt{n} W_{2n-2}$$

4. De même, utiliser un changement de variable judicieux pour prouver que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

5. Conclure à l'aide de l'exercice précédent que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

   (où $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = G = \lim_{n\to+\infty} G(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ par définition).