Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
PCST S1

Corrigé du devoir maison n° 3

Exercice 1 : 1. – On intègre par parties en posant $u(x) = \ln^3(x)$, $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = 3.\frac{1}{x}.\ln^2(x) = \frac{3\ln^2(x)}{x}$, $v(x) = x$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \ln^3(x)dx = \int_1^e \ln^3(x).1dx = \int_1^e u(x).v'(x)dx \\ &= [u(x).v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x).v(x)dx = \left[\ln^3(x).x\right]_1^e - \int_1^e \frac{3\ln^2(x)}{x}.xdx \\ &= (1.e - 0.1) - \int_1^e 3\ln^2(x)dx = e - 3\int_1^e \ln^2(x)dx \end{aligned}$$

On intègre à nouveau par parties en posant $u(x) = \ln^2(x)$, $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = 2.\frac{1}{x}.\ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$, $v(x) = x$:

$$\begin{aligned} I_1 &= e - 3\int_1^e \ln^2(x)dx = e - 3\int_1^e \ln^2(x).1dx = e - 3\int_1^e u(x).v'(x)dx \\ &= e - 3\left([u(x).v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x).v(x)dx\right) = e - 3\left[\ln^2(x).x\right]_1^e + 3\int_1^e \frac{2\ln(x)}{x}.xdx \\ &= e - 3(1.e - 0.1) + 3\int_1^e 2\ln(x)dx = -2e + 6\int_1^e \ln(x)dx \end{aligned}$$

On intègre une dernière fois par parties en posant $u(x) = \ln(x)$, $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$:

$$\begin{aligned} I_1 &= -2e + 6\int_1^e \ln(x)dx = -2e + 6\int_1^e \ln(x).1dx = -2e + 6\int_1^e u(x).v'(x)dx \\ &= -2e + 6\left([u(x).v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x).v(x)dx\right) = -2e + 6\,[\ln(x).x]_1^e - 6\int_1^e \frac{1}{x}.xdx \\ &= -2e + 6(1.e - 0.1) - 6\int_1^e 1dx = 4e - 6\,[x]_1^e = 4e - 6(e-1) = 6 - 2e \end{aligned}$$

– On intègre par parties en posant $u(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$, $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{3+2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$, $v(x) = x$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^3 \sqrt{3+2x-x^2}dx = \int_{-1}^3 \left(\sqrt{3+2x-x^2}\right).1dx = \int_{-1}^3 u(x).v'(x)dx \\ &= [u(x).v(x)]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 u'(x).v(x)dx = \left[\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right).x\right]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}.xdx \\ &= \left(3\sqrt{3+6-9} + \sqrt{3-2-1}\right) - \int_{-1}^3 \frac{x-x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx \\ &= 0 - \int_{-1}^3 \left(\frac{3+2x-x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \frac{-3-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\right)dx \\ &= -\int_{-1}^3 \sqrt{3+2x-x^2}dx - \int_{-1}^3 \left(\frac{2-2x}{2\sqrt{3+2x-x^2}} - \frac{4}{\sqrt{3+2x-x^2}}\right)dx \\ &= -J_2 - \left[\sqrt{3+2x-x^2}\right]_{-1}^3 + 4\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{4-(1-x)^2}}dx \\ &= -J_2 - \left(\sqrt{3+6-9} - \sqrt{3-2-1}\right) + 4\int_{-1}^3 \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}}dx \\ &= -J_2 - 0 - 4\int_{-1}^3 \frac{\frac{-1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}}dx = -J_2 - 4\left[\arcsin\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{-1}^3 \\ &= -J_2 - 4(\arcsin(-1) - \arcsin(1)) = -J_2 - 4\left(\frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -J_2 + 4\pi \end{aligned}$$

On en déduit que $2I_2 = 4\pi$ et donc que $I_2 = 2\pi$.

2. I_2 est l'aire du domaine $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3+2x-x^2}\}$. Or $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3+2x-x^2} \Leftrightarrow y \geqslant 0$ et $y^2 \leqslant 3+2x-x^2 = 4-(1-x)^2 \Leftrightarrow y \geqslant 0$ et $y^2+(x-1)^2 \leqslant 2^2$, donc D est le demi-cercle supérieur de rayon $R=2$ et de centre C de coordonnées $(1;0)$. Ainsi $I_2 = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$.

Exercice 2 : 1. – On a $\frac{\tan(x+\pi)(1-\tan(x+\pi))}{\cos^2(x+\pi)} = \frac{\tan(x)(1-\tan(x))}{(-\cos(x))^2} = \frac{\tan(x)(1-\tan(x))}{\cos^2(x)}$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Ainsi on pose $t = \tan(x)$ d'après les règles de Bioche, donc $dt = \left(1+\tan^2(x)\right)dx = \frac{dx}{\cos^2(x)}$, $t=0$ si $x=0$ et $t=1$ si $x=\frac{\pi}{4}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)\,(1-\tan(x))}{\cos^2(x)}dx = \int_0^{\pi/4} \tan(x)\,(1-\tan(x))\,\frac{dx}{\cos^2(x)} \\ &= \int_0^1 t\,(1-t)\,dt = \int_0^1 \left(t-t^2\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

– On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, donc $dt = \frac{1}{2}.\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \frac{1+t^2}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1 = \frac{2}{1+\tan^2(x/2)}-1 = \frac{2}{1+t^2}-1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. De plus $t=0$ si $x=0$ et $t=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ si $x=\frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos(x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2-\cos(x)}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{2(1+t^2)-(1-t^2)} \\ &= 2\int_0^1 \frac{dt}{3t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\sqrt{3}dt}{\left(\sqrt{3}t\right)^2+1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\sqrt{3}t\right)\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)-0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

2. En posant $x = \frac{\pi}{2}+h$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\cos(x)} &= \frac{1}{2-\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)} = \frac{1}{2+\sin(h)} = \frac{1}{2+h+o_{h\to 0}(h)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{h}{2}+o_{h\to 0}(h)\right)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{2}+o_{h\to 0}(h)\right) = \frac{1}{2}-\frac{h}{4}+o_{h\to 0}(h) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+o_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{2-\cos(x)}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ a pour équation $y = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Puisque $\mathcal{C}$ est au-dessus de T entre les axes verticaux d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$, l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}$, T et ces deux axes verticaux est donnée par $A = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2-\cos(x)}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)dx = J_2-\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{4}\right)\right) = \frac{(8\sqrt{3}-9)\pi}{36}-\frac{\pi^2}{32}$

Exercice 3 : 1. – On a $X^2(X-1)^2 = X^4-2X^3+X^2$ et $(X+1)^2(X+2)^2 = (X^2+2X+1)(X^2+4X+4) = X^4+6X^3+13X^2+12X+4$ donc $X^2(X-1)^2 = (X+1)^2(X+2)^2-(8X^3+12X^2+12X+4)$ avec $\deg\left(8X^3+12X^2+12X+4\right) = 3 < 4 = \deg\left((X+1)^2(X+2)^2\right)$. Donc d'après le théorème de décomposition en éléments simples :

$$\frac{X^2(X-1)^2}{(X+1)^2(X+2)^2} = 1+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{X+2}+\frac{d}{(X+2)^2} \quad \text{où } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

En multipliant cette égalité par $(X+1)^2$ puis en posant $X=-1$ on obtient $\frac{(-1)^2(-1-1)^2}{(-1+2)^2} = b \Rightarrow b = 4$. De même en multipliant par $(X+2)^2$ puis en posant $X=-2$ on obtient $\frac{(-2)^2(-2-1)^2}{(-2+1)^2} = d \Rightarrow d = 36$. En posant $X=0$ l'égalité donne $0 = 1+a+b+\frac{c}{2}+\frac{d}{4} \Rightarrow a+\frac{c}{2} = -1-b-\frac{d}{4} = -14$, et en posant $X=1$ elle donne $1+\frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}+\frac{d}{9} \Rightarrow \frac{a}{2}+\frac{c}{3} = -1-\frac{b}{4}-\frac{d}{9} = -6$. On obtient donc un système de deux équations à deux inconnues a et c dont la solution est $a = 4.(-14)-6.(-6) = -20$ et $c = 2(-14-a) = 12$. Ainsi :

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^1 \frac{x^2(x-1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx = \int_0^1\left(1+\frac{-20}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{12}{x+2}+\frac{36}{(x+2)^2}\right)dx \\ &= [x]_0^1-20\left[\ln(x+1)\right]_0^1+4\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1+12\left[\ln(x+2)\right]_0^1+36\left[\frac{-1}{x+2}\right]_0^1 \\ &= (1-0)-20(\ln(2)-0)+4\left(\frac{-1}{2}+1\right)+12(\ln(3)-\ln(2))+36\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right) \\ &= 9+12\ln(3)-32\ln(2) \end{aligned}$$

- On a $X^2-2X+10=(X-1)^2+9=9\left(\left(\frac{X-1}{3}\right)^2+1\right)\geqslant 9>0$ en particulier le polynôme $X^2-2X+10$ est irréductible. De plus $\deg\left(X(X+8)\right)=2<4=\deg\left((X^2-2X+10)^2\right)$, donc d'après le théorème de décomposition en éléments simples :

$$\frac{X(X+8)}{(X^2-2X+10)^2}=\frac{aX+b}{X^2-2X+10}+\frac{cX+d}{(X^2-2X+10)^2}\quad \text{où } a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

Si on réduit au même dénominateur le membre de droite de cette égalité, on obtient pour numérateur :

$$(aX+b)\left(X^2-2X+10\right)+(cX+d)=aX^3+(-2a+b)X^2+(10a-2b+c)X+(10b+d)$$

En comparant ce polynôme avec le numérateur $X(X+8)=X^2+8X$ on obtient : $a=0$, $-2a+b=1\Rightarrow b=1$, $10a-2b+c=8\Rightarrow c=10$ et $10b+d=0\Rightarrow d=-10$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_1^4 \frac{x(x+8)}{(x^2-2x+10)^2}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{x^2-2x+10}+\frac{10x-10}{(x^2-2x+10)^2}\right)dx\\
&= \int_1^4 \frac{1}{9\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1\right)}dx+5\int_1^4\frac{2x-2}{(x^2-2x+10)^2}dx\\
&= \frac{1}{3}\int_1^4\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1}dx+5\left[\frac{-1}{x^2-2x+10}\right]_1^4\\
&= \frac{1}{3}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)\right]_1^4+5\left(\frac{-1}{18}-\frac{-1}{9}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\arctan(1)-\arctan(0)\right)+\frac{5}{18}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\frac{5}{18}=\frac{5}{18}+\frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

2. S est un solide de révolution autour de l'axe des abscisses. Chaque section d'abscisse $x\in[0,1]$ est un disque de rayon $R(x)=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}$. Le volume de S est donc donné par $V=\int_0^1\pi R(x)^2dx=\pi K_1=(9+12\ln(3)-32\ln(2))\,\pi$.

Exercice 4 : 1. On intègre par parties en posant $u(x)=\sin^{n-1}(x)$, $v'(x)=\sin(x)$ donc $u'(x)=(n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)$, $v(x)=-\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\pi/2}\sin^n(x)dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}(x).\sin(x)dx\\
&= \left[\sin^{n-1}(x).(-\cos(s))\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x).(-\cos(x))dx\\
&= (1.0-0.1)+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x).\cos^2(x)dx\\
&= 0+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x).(1-\sin^2(x))dx\\
&= (n-1)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)dx-\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)dx\right)=(n-1)\left(W_{n-2}-W_n\right)
\end{aligned}$$

On obtient $(1+(n-1))W_n=nW_n=(n-1)W_{n-2}$ et par conséquent $W_n=\frac{n-1}{n}W_{n-2}$.

2. On a $W_0=\int_0^{\pi/2}1dx=[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$ et $W_1=\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx=[-\cos(x)]_0^{\pi/2}=0-(-1)=1$, donc en utilisant la question précédente : $W_{2.1}=W_2=\frac{2-1}{2}W_0=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$ et $W_{2.1+1}=W_3=\frac{3-1}{3}W_1=\frac{2}{3}=\frac{2}{3.1}$ ce qui prouve que le résultat est vrai au rang p=1. On suppose ensuite le résultat vrai au rang $p-1\in\mathbb{N}$ et on va le démontrer au rang p en utilisant encore la question précédente :

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2}=\frac{2p-1}{2p}W_{2(p-1)}=\frac{2p-1}{2p}.\frac{(2(p-1)-1).(2(p-1)-3)\dots 3.1}{2(p-1).(2(p-1)-2)\dots 4.2}.\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2p-1).(2p-3).(2p-5)\dots 3.1}{2p.(2p-2).(2p-4)\dots 4.2}.\frac{\pi}{2}\\
W_{2p+1} &= \frac{(2p+1)-1}{2p+1}W_{2p+1-2}=\frac{2p}{2p+1}W_{2(p-1)+1}=\frac{2p}{2p+1}.\frac{2(p-1).(2(p-1)-2)\dots 4.2}{(2(p-1)+1).(2(p-1)-1)\dots 3.1}\\
&= \frac{2p.(2p-2).(2p-4)\dots 4.2}{(2p+1).(2p-1).(2p-3)\dots 3.1}
\end{aligned}$$

Ainsi le résultat est vrai au rang p s'il l'est au rang $p-1$. On conclut en utilisant le principe de récurrence.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ on en déduit en multipliant cette inégalité par $\sin^{2p}(x) \geqslant 0$ que $0 \leqslant \sin^{2p+1}(x) \leqslant \sin^{2p}(x)$ et en multipliant par $\sin^{2p-1}(x) \geqslant 0$ que $0 \leqslant \sin^{2p}(x) \leqslant \sin^{2p-1}(x)$. Finalement on a $0 \leqslant \sin^{2p+1}(x) \leqslant \sin^{2p}(x) \leqslant \sin^{2p-1}(x)$ puis en intégrant par rapport à x : $0 \leqslant W_{2p+1} \leqslant W_{2p} \leqslant W_{2p-1}$. Si on divise cette inégalité par $W_{2p+1} > 0$ on obtient $1 \leqslant \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \leqslant \frac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}}$. Or d'après la première question $W_{2p+1} = \frac{(2p+1)-1}{2p+1} W_{2p+1-2} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1}$ et donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p+1}{2p} = \lim_{p\to+\infty} 1 + \frac{1}{2p} = 1 + 0 = 1$ ce qui entraîne, d'après le théorème d'encadrement des limites, que $\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1$.

4. D'après la deuxième question on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\left(\frac{2p.(2p-2)\ldots 4.2}{(2p-1).(2p-3)\ldots 3.1}\right)^2 &= \frac{1}{p}(2p+1)\left(\frac{2p.(2p-2)\ldots 4.2}{(2p+1).(2p-1)\ldots 3.1}\right)\left(\frac{2p.(2p-2)\ldots 4.2}{(2p-1).(2p-3)\ldots 3.1}.\frac{2}{\pi}\right)\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{p}(2p+1)\left(W_{2p+1}\right)\left(\frac{1}{W_{2p}}\right)\frac{\pi}{2} = \left(2 + \frac{1}{p}\right)\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente $\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \frac{1}{\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}}} = \frac{1}{1} = 1$, par conséquent :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{2p.(2p-2)\ldots 4.2}{(2p-1).(2p-3)\ldots 3.1}\right)^2 = (2+0).1.\frac{\pi}{2} = \pi$$

5. D'après la deuxième question, la formule de Wallis peut aussi s'écrire $\frac{1}{p}\left(\frac{\pi/2}{W_{2p}}\right)^2 \sim \pi$ c'est à dire $W_{2p}^2 \sim \frac{1}{p}\left(\pi/2\right)^2 \frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{4p}$ et donc $W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ car $W_{2p} \geqslant 0$. Or $W_{2p+1} \sim W_{2p}$ d'après la troisième question d'où $W_{2p} \sim W_{2p+1} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$. Maintenant si $n = 2p$ ou $2p+1$, alors $n \sim 2p$ donc $p \sim \frac{n}{2}$ et par conséquent $W_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{(n/2)}} = \sqrt{\frac{\pi}{4(n/2)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 5 : 1. On pose $f(x) = x - \ln(1+x)$ pour tout $x > -1$. f est continue et dérivable car ln l'est sur $]0, +\infty[$ et $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$. On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ donc f est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, en particulier f admet un minimum en $x = 0$ de $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$. Pour tout $x > -1$, on a donc $f(x) \geqslant 0$ c'est à dire $x \geqslant \ln(1+x)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $t \in [0, \sqrt{n}[$ alors $-\frac{t^2}{n} > -1$ et $\frac{t^2}{n} \geqslant 0 > -1$ ce qui entraîne d'après la question précédente $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$ et $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$. En multipliant la seconde inégalité par -1 (ce qui renverse le sens) on obtient $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n} \leqslant -\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$. Ensuite on multiplie cette inégalité par n (qui est positif car $n \geqslant 1$), puis on compose par la fonction exponentielle (qui est croissante) et on arrive à :

$$e^{n\ln(1-\frac{t^2}{n})} = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{n\frac{-t^2}{n}} = e^{-t^2} \leqslant e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{n})} = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \quad \text{pour tout } t \in \left[0, \sqrt{n}\right[$$

Ce résultat est également vrai pour $t = \sqrt{n}$. De plus $t \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$, $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n$ sont des fonctions continues sur $[0, \sqrt{n}]$ donc on peut intégrer ce résultat et on obtient :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = G(n) \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

3. On pose $t = \sqrt{n}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sqrt{n}}{\tan(x)}$ et donc $dt = \sqrt{n}\frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}dx = \sqrt{n}\frac{-dx}{\sin^2(x)}$. De plus, $x = \arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{t}\right)$ donc $x = \frac{\pi}{2}$ si $t = 0$ (car $t \geqslant 0$ et $\lim_{s\to+\infty} \arctan(s) = \frac{\pi}{2}$) et $x = \frac{\pi}{4}$ si $t = \sqrt{n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt &= \int_{\pi/2}^{\pi/4} \left(1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right)^{-n} \sqrt{n}\frac{-dx}{\sin^2(x)} \\
&= \sqrt{n}\left(-\int_{\pi/2}^{\pi/4} \left(\frac{\sin^2(x) + 1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)}\right)^{-n} \frac{dx}{\sin^2(x)}\right) \\
&= \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^{-2n}(x)}\frac{dx}{\sin^2(x)} = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x)dx \\
&\leqslant \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x)dx = \sqrt{n}W_{2n-2} \quad \text{car } \sin(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

4. On pose $t=\sqrt{n}\cos(x)$ et donc $dt=\sqrt{n}\,(-\sin(x))\,dx$. De plus, $x=\arccos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ donc $x=\frac{\pi}{2}$ si $t=0$ et $x=0$ si $t=\sqrt{n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt &= \int_{\pi/2}^{0}\left(1-\cos^2(x)\right)^n\sqrt{n}\,(-\sin(x))\,dx\\
&= \sqrt{n}\left(-\int_{\pi/2}^{0}\left(1-(1-\sin^2(x))\right)^n\sin(x)dx\right)\\
&= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(x)\sin(x)dx=\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(x)dx=\sqrt{n}W_{2n+1}
\end{aligned}$$

5. Finalement on a d'après les questions précédentes $\sqrt{n}W_{2n-2}\leqslant G(n)\leqslant\sqrt{n}W_{2n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Or d'après l'exercice précédent $W_{2n-2}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ et $W_{2n+1}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ ce qui entraîne que $\sqrt{n}W_{2n-2}\sim\sqrt{n}W_{2n+1}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_{2n-2}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On en déduit d'après le théorème d'encadrement des limites que $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=G=\lim_{n\to+\infty}G(n)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.