Contrôle continu n° 2
(durée : 1h)

Question de cours 1 : Donner l'énoncé du théorème de dérivation des séries de fonctions.

Exercice 2 : Soit f la fonction paire et 2π périodique définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = e^{\lambda x}$ où $\lambda \neq 0$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Discuter de la convergence (ponctuelle) de la série de Fourier $S(f)$ de f en rappelant précisément le théorème utilisé et en vérifiant avec soin ses hypothèses.
3. En considérant la quantité $e^{\lambda\pi}S(f)(0) + S(f)(\pi)$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ pour $\lambda \neq 0$.
4. Montrer que la série de fonctions $\lambda \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 3 : Soient g et h deux fonctions impaires et 2π périodiques définies sur $[0,\pi[$ par $g(x) = x$ et $h(x) = x(x^2 - \pi^2)$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de g et h.
2. En utilisant un résultat du cours que vous rappellerez, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.
3. En raisonnant de même pour la fonction $h + \pi^2 g$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.