Corrections du contrôle continu n° 2

Question de cours 1 : Soient $\sum f_n$ une série de fonctions et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé tels que $\sum(f_n(x_0))$ converge, chaque f_n est dérivable de dérivée f_n' et $\sum f_n'$ converge uniformément dans un voisinage de x_0. Alors $\sum f_n$ converge uniformément dans ce même voisinage vers une fonction f dérivable de dérivée $f' = \sum f_n'$.

Exercice 2 :

1. $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ pour tout $n \geqslant 0$ car $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ car $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire. En particulier on a $a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda x}dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\lambda\pi}\left(e^{\lambda\pi}-1\right)$. Pour $n \geqslant 1$, on utilise des intégrations par parties :
$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda x}.\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[e^{\lambda x}.\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\lambda e^{\lambda x}.\frac{\sin(nx)}{n}dx \\ &= 0 - \frac{2}{\pi}\left[\lambda e^{\lambda x}.\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\lambda^2 e^{\lambda x}.\frac{-\cos(nx)}{n^2}dx = \frac{2\lambda}{\pi n^2}\left((-1)^n e^{\lambda\pi}-1\right) - \frac{\lambda^2}{n^2}a_n(f)\end{aligned}$$
et donc :
$$a_n(f) = \frac{\frac{2\lambda}{\pi n^2}\left((-1)^n e^{\lambda\pi}-1\right)}{1+\frac{\lambda^2}{n^2}} = \frac{2\lambda}{\pi(n^2+\lambda^2)}\left((-1)^n e^{\lambda\pi}-1\right)$$
(On peut également obtenir directement $a_n(f)$ en remplaçant $\cos(nx)$ par $\frac{1}{2}\left(e^{\imath nx}+e^{-\imath nx}\right)$ avant d'intégrer).
2. Puisque f est 2π périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (car $x \mapsto e^{\lambda x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), elle vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet. Ainsi la série de Fourier $S(f)$ de f converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $S(f)(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{s\to t^-} f(s) + \lim_{s\to t^+} f(s)\right)$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (car $f(-\pi) = f(\pi)$ par parité de f) donc $\lim_{s\to t^-} f(s) = \lim_{s\to t^+} f(s) = f(t)$ et par conséquent $S(f)(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, $S(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right) = \frac{e^{\lambda\pi}-1}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{n^2+\lambda^2}\cos(nt)$. En particulier les valeurs en $t=0$ et $t=\pi$ donnent :
$$\begin{aligned} e^{\lambda\pi}S(f)(0) + S(f)(\pi) &= \left(e^{\lambda\pi}+1\right)\left(\frac{e^{\lambda\pi}-1}{\lambda\pi}\right) + \frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\lambda\pi}\left((-1)^n e^{\lambda\pi}-1\right) + \left((-1)^n e^{\lambda\pi}-1\right)(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \\ &= \frac{e^{2\lambda\pi}-1}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\left(e^{2\lambda\pi}-1\right)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\end{aligned}$$
Par ailleurs on a vu que $e^{\lambda\pi}S(f)(0) + S(f)(\pi) = e^{\lambda\pi}f(0) + f(\pi) = e^{\lambda\pi}.1 + e^{\lambda\pi} = 2e^{\lambda\pi}$, donc :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \left(2e^{\lambda\pi} - \frac{e^{2\lambda\pi}-1}{\lambda\pi}\right)\frac{\pi}{2\lambda\left(e^{2\lambda\pi}-1\right)} = \frac{\pi e^{\lambda\pi}}{\lambda\left(e^{2\lambda\pi}-1\right)} - \frac{1}{2\lambda^2}$$
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$ on a $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$ (somme de Riemann). Ainsi la série de fonctions $\lambda \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ converge normalement et en particulier uniformément sur $\mathbb{R}$. On en déduit d'après le théorème de continuité des séries de fonctions et en utilisant le résultat précédent :
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{\lambda\to 0}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{\pi e^{\lambda\pi}}{\lambda\left(e^{2\lambda\pi}-1\right)} - \frac{1}{2\lambda^2}\right) = \frac{-\pi^2}{12}\end{aligned}$$
$$\text{car : } \frac{\pi e^{\lambda\pi}}{\lambda\left(e^{2\lambda\pi}-1\right)} = \frac{\pi\left(1+\pi\lambda+\frac{\pi^2\lambda^2}{2}+o_{\lambda\to 0}(\lambda^2)\right)}{\lambda\left(2\pi\lambda+2\pi^2\lambda^2+\frac{4\pi^3\lambda^3}{3}+o_{\lambda\to 0}(\lambda^3)\right)} = \frac{1}{2\lambda^2}\left(1-\frac{\pi^2\lambda^2}{6}+o_{\lambda\to 0}(\lambda^2)\right)$$

Exercice 3 : 1. $a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ car $x \mapsto g(x)\cos(nx)$ est impaire et $b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)dx$ pour tout $n \geqslant 1$ car $x \mapsto g(x)\sin(nx)$ est paire. Puis en utilisant une intégration par parties on obtient pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[x.\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\frac{-\cos(nx)}{n}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\pi.\frac{-(-1)^n}{n} - 0\right) - \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{-2(-1)^n}{n} - 0 = \frac{-2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

De même pour h on a $a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(nx)dx = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ et $b_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\sin(nx)dx$ pour tout $n \geqslant 1$ ce qui donne par intégrations par parties pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} b_n(h) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(x^2-\pi^2).\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[x(x^2-\pi^2).\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(3x^2-\pi^2\right).\frac{-\cos(nx)}{n}dx \\ &= 0 - \frac{2}{\pi}\left[(3x^2-\pi^2).\frac{-\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 6x.\frac{-\sin(nx)}{n^2}dx = 0 - \frac{6}{n^2}b_n(g) = \frac{12(-1)^n}{n^3} \end{aligned}$$

2. Puisque g est 2π périodique, intégrable et de carré intégrable sur $]-\pi,\pi[$, elle vérifie la formule de Bessel-Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2dx = \frac{a_0(g)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(g)^2 + b_n(g)^2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2dx &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3} \\ &= \frac{0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(0^2 + \left(\frac{-2(-1)^n}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. De même pour h on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)^2dx &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\left(x^2-\pi^2\right)^2dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^6 - 2\pi^2x^4 + \pi^4x^2\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^7}{7} - 2\pi^2\frac{x^5}{5} + \pi^4\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^7}{\pi}\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi^6}{105} \\ &= \frac{0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(0^2 + \left(\frac{12(-1)^n}{n^3}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{144}{n^6} = 72\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

3. En utilisant la linéarité de l'intégrale (et donc des coefficients de Fourier) on obtient pour $h + \pi^2 g = (x \mapsto x^3)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(h(x) + \pi^2g(x)\right)^2dx &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^6dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^6}{7} \\ &= \frac{a_0(h+\pi^2g)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(a_n(h+\pi^2g)\right)^2 + \left(b_n(h+\pi^2g)\right)^2\right) \\ &= \frac{a_0(h)+\pi^2a_0(g)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(a_n(h)+\pi^2a_n(g)\right)^2 + \left(b_n(h)+\pi^2b_n(g)\right)^2\right) \\ &= \frac{0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(0^2 + \left(\frac{12(-1)^n}{n^3} + \pi^2\frac{-2(-1)^n}{n}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{144}{n^6} + 2\pi^2\frac{-24}{n^4} + \pi^4\frac{4}{n^2}\right) = 72\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} - 24\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + 2\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

La dernière égalité étant justifiée car chacune des trois sommes converge (séries de Riemann). On en déduit en utilisant les résultats précédents que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{24\pi^2}\left(72\frac{\pi^6}{945} + 2\pi^4\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^6}{7}\right) = \frac{\pi^6}{\pi^2}\left(\frac{1}{315} + \frac{1}{72} - \frac{1}{168}\right) = \frac{\pi^4}{90}$.