Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
Compléments d'Analyse

Contrôle continu n° 1
(durée : 1h)

Exercice 1 : Rappeler la définition d'une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et celle de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite bornée de $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to\infty}\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right) = 1$.

1. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n) alors $2(1-a)$ est aussi une valeur d'adhérence de (u_n).
2. Montrer que la suite (a_n) de $\mathbb{R}$ définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2(1-a_n)$ et $a_0 \in \mathbb{R}$ est divergente sauf pour une unique valeur initiale a_0 que vous préciserez.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 3 : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Comparer $int(A \cap B)$ et $int(A) \cap int(B)$. Justifier votre réponse.

Exercice 4 : On notre $frac$ la partie fractionnaire d'un réel x c'est à dire $frac(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que $A = \left\{u_n - m / (n,m) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $B = \left\{frac\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K}\right) / n \geqslant 1\right\}$ est dense dans l'intervalle $[0,1]$.