Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
Compléments d'Analyse

Contrôle continu n° 1
Corrections

Exercice 1 : (u_n) suite de $\mathbb{R}$ est de Cauchy si $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n\geqslant N,\forall k\geqslant 0,|u_{n+k}-u_n|\leqslant\varepsilon$.
$\ell\in\mathbb{R}$ est la borne supérieure de $A\subset\mathbb{R}$ si c'est le plus petit majorant de A c'est à dire si $\forall a\in A,a\leqslant\ell$ et $\forall\varepsilon>0,\exists a\in A,a\geqslant\ell-\varepsilon$.

Exercice 2 :

1. Si a est une valeur d'adhérence alors $\forall\varepsilon_1>0,\forall N_1,\exists n_1\geqslant N_1,|u_{n_1}-a|\leqslant\varepsilon_1$. Or on a par hypothèse : $\forall\varepsilon_2>0,\exists N_2,\forall n_2\geqslant N_2,\left|1-\left(u_{n_2}+\frac{u_{2n_2}}{2}\right)\right|\leqslant\varepsilon_2$. Donc pour $\varepsilon>0$ et N fixés, on a en posant $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{4}>0$, $N_1=\max(N,N_2)$, $n_2=n_1\geqslant N_1\geqslant N_2$ et $n=2n_2=2n_1\geqslant 2N_1\geqslant 2N\geqslant N$: $|2(1-a)-u_n|=|2u_{n_1}-2a+2-2u_{n_2}-u_{2n_2}|\leqslant 2|u_{n_1}-a|+2\left|1-\left(u_{n_2}+\frac{u_{2n_2}}{2}\right)\right|\leqslant 2\varepsilon_1+2\varepsilon_2=\varepsilon$ c'est à dire $2(1-a)$ est aussi une valeur d'adhérence.
2. On a $\forall k,\left|a_{k+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|2(1-a_k)-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{4}{3}-2a_k\right|=2\left|a_k-\frac{2}{3}\right|$ donc on en déduit par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},|a_n|\geqslant\left|a_n-\frac{2}{3}\right|-\frac{2}{3}=2^n\left|a_0-\frac{2}{3}\right|-\frac{2}{3}$ et cette quantité tend vers $+\infty$ sauf si $a_0=\frac{2}{3}$.
3. Puisque (u_n) est bornée, elle admet au moins une valeur d'adhérence $a\in\mathbb{R}$. D'après 1. on peut construire par récurrence une suite de valeurs d'adhérence définie par $\forall n\in\mathbb{N},a_{n+1}=2(1-a_n)$ et $a_0=a$. D'après 2., si $a\neq\frac{2}{3}$ cette suite n'est pas bornée ce qui est absurde car (u_n) est bornée donc l'ensemble de ses valeurs d'adhérence aussi. Ainsi $a=\frac{2}{3}$, en particulier (u_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence donc elle est convergente.

Exercice 3 : Si $x\in int(A\cap B)$ alors $\exists\varepsilon>0,]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset A\cap B$ en particulier $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset A$ donc $x\in$ *int(A)* et $int(A\cap B)\subset$ *int(A)*. De même $int(A\cap B)\subset$ *int(B)* et donc $int(A\cap B)\subset int(A)\cap int(B)$. Soit maintenant $x\in int(A)\cap int(B)$. Alors $\exists\varepsilon_1>0,]x-\varepsilon_1,x+\varepsilon_1[\subset A$ et $\exists\varepsilon_2>0,]x-\varepsilon_2,x+\varepsilon_2[\subset B$. Ainsi pour $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ on a $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_1,x+\varepsilon_1[\subset A$ et $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_2,x+\varepsilon_2[\subset B$ c'est à dire $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset A\cap B$ donc $x\in int(A\cap B)$ et $int(A)\cap int(B)\subset int(A\cap B)$. Finalement $int(A\cap B)=int(A)\cap int(B)$.

Exercice 4 :

1. On a par hypothèses : $\forall M,\exists N,\forall n\geqslant N,u_n\geqslant M$ et $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n\geqslant N,|u_{n+1}-u_n|\leqslant\varepsilon$. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$ fixés. Pour $2\varepsilon>0$ on a N_1 tel que $\forall n\geqslant N_1,|u_{n+1}-u_n|\leqslant 2\varepsilon$. Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, $\exists m\in\mathbb{N},m\geqslant u_{N_1}-x$. Pour $M=m+x$ on a N_2 tel que $\forall n\geqslant N_2,u_n\geqslant m+x$, en particulier pour $N_3=\max(N_1,N_2)$ on a $u_{N_3}\geqslant m+x\geqslant u_{N_1}$. Or $\forall n\in\{N_1,N_1+1,\ldots,N_3\},|u_{n+1}-u_n|\leqslant 2\varepsilon$ donc $\exists n\in\{N_1,N_1+1,\ldots,N_3\},u_n\in[(m+x)-\varepsilon,(m+x)+\varepsilon]$ car $((m+x)+\varepsilon)-((m+x)-\varepsilon)=2\varepsilon$. Finalement $\forall x\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,\exists(n,m)\in\mathbb{N}^2,u_n-m\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ c'est à dire $A=\{u_n-m/(n,m)\in\mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. On pose pour tout $n\geqslant 1,u_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$ alors $u_n\geqslant\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}=\ln(n+1)$ car $t\mapsto\frac{1}{t}$ est décroissante et $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{k+1}$. Donc $\lim_{n\to\infty}u_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$ et d'après 1., $\{u_n-m/n\geqslant 1$ et $m\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soient $x\in]0,1[$ et $\varepsilon>0$ fixés. On pose $\varepsilon'=\min(\varepsilon,x,1-x)>0$ ainsi $[x-\varepsilon',x+\varepsilon']\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\cap[0,1[$. Par densité on a $\exists n\geqslant 1$ et $m\in\mathbb{N},u_n-m\in[x-\varepsilon',x+\varepsilon']$. En particulier $u_n-m\in[0,1[$ donc $m=E(u_n)$ et $u_n-m=frac(u_n)$. Ainsi $\forall x\in]0,1[,\forall\varepsilon>0,\exists n\geqslant 1,frac(u_n)\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ c'est à dire $B=\left\{frac\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{k}\right)/n\in\mathbb{N}\right\}$ est dense dans $[0,1]$.