

Contrôle continu n°1

Exercice 1 Pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on définit :

$$N(x, y, z) = \max(|x| + |y|, |z|)$$

1. Montrez que N est une norme sur \mathbb{R}^3 .
2. Montrez que N est équivalente à la norme $\|\cdot\|_1 : (x, y, z) \mapsto \|(x, y, z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$.

Exercice 2 On considère l'ensemble :

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$$

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Rappelez la définition d'un ensemble ouvert et d'un ensemble fermé dans E .
2. Δ est-il ouvert dans \mathbb{R}^2 ? Est-il fermé dans \mathbb{R}^2 ? Justifiez vos réponses.
3. Donnez un exemple de sous-ensemble de \mathbb{R} qui n'est ni ouvert ni fermé dans \mathbb{R} et expliquez pourquoi.

Exercice 3 Soit la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{(x-1)^3 y^2}{(x^2+y^2-2x+1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

Étudiez la continuité de f sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 4 Soit la fonction suivante :

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

g est-elle continue en $(0, 0)$? Justifiez votre réponse.