Correction du contrôle continu n°1

Exercice 1 1. On a bien $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, N(x,y,z) \geqslant 0$ car les valeurs absolues sont positives.
De plus :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} N(x,y,z) = 0 &\Leftrightarrow |x| + |y| = 0 \text{ et } |z| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x| = |y| = 0 \text{ et } |z| = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \end{aligned}$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda(x,y,z)) &= N(\lambda x, \lambda y, \lambda z)) = max\,(|\lambda x| + |\lambda y|, |\lambda z|) \\ &= max\,(|\lambda|(|x| + |y|), |\lambda||z|) = |\lambda| max\,(|x| + |y|, |z|) = |\lambda| N(x,y,z) \end{aligned}$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} N((x,y,z) + (x',y',z')) &= N(x+x', y+y', z+z') = max\,(|x+x'| + |y+y'|, |z+z'|) \\ &\leqslant max\,(|x| + |x'| + |y| + |y'|, |z| + |z'|) \\ &= max\,(|x| + |y| + (|x'| + |y'|), |z| + |z'|) \\ &\leqslant max\,(|x| + |y| + N(x',y',z'), |z| + N(x',y',z')) \\ &= max\,(|x| + |y|, |z|) + N(x',y',z') = N(x,y,z) + N(x',y',z') \end{aligned}$$

Donc N définit bien une norme sur $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$max\,(|x| + |y|, |z|) \leqslant |x| + |y| + |z| = (|x| + |y|) + |z| \leqslant max\,(|x| + |y|, |z|) + max\,(|x| + |y|, |z|)$$

Donc $N \leqslant \|.\|_1 \leqslant 2N$ ce qui prouve que N et $\|.\|_1$ sont équivalentes.

Exercice 2 1. $\mathfrak{O} \subset E$ est ouvert si :

$$\forall x \in \mathfrak{O}, \exists r > 0 / \forall y \in E, \|y - x\| < r \Rightarrow y \in \mathfrak{O}$$

$\mathfrak{F} \subset E$ est fermé si son complémentaire dans E est ouvert.

2. Δ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
Par exemple $(0,0) \in \Delta$ et $\forall r > 0, \|(0, r/2) - (0,0)\|_2 = r/2 < r$ mais $(0, r/2) \notin \Delta$
Par contre Δ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
Par exemple pour $(x,y) \notin \Delta$ on peut prendre $r = |x - y| > 0$. Et si $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\|(x',y') - (x,y)\|_2 < r$ alors $x' \neq y'$ (sinon $|x - y| \leqslant \|(x' - x, x' - y)\|_2 < r$).

3. Par exemple $I = [0,1[$ est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$ car il n'existe pas de voisinage de 0 inclus dans I ni de voisinage de 1 inclus dans $\mathbb{R} \backslash I$.

Exercice 3 f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ comme quotient d'un polynôme (en particulier une fonction continue) par le polynôme $(x^2+y^2-2x+1)^2 = \left((x-1)^2+y^2\right)^2$ qui ne s'annule pas.

Pour la continuité en $(1,0)$ on pose $(x,y) = (1+r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r>0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f\left(1+r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right) = \frac{r^5\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)}{\left(r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)\right)^2} = r\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$$

Puisque la quantité $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$ est bornée, on en déduit :

$$\lim_{r\to 0} f\left(1+r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0 = f(1,0)$$

Ce qui prouve la continuité de f en $(1,0)$.

Exercice 4 On a par exemple :

$$\forall x \neq 0, g(x,2x) = \frac{2x^2(x^2-4x^2)}{\left(x^2+4x^2\right)^2} = \frac{-6x^4}{25x^4} = \frac{-6}{25} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{-6}{25} \neq 0 = g(0,0)$$

Ce qui prouve que g n'est pas continue en $(0,0)$.