Enoncé et correction du contrôle continu n°3 en MS2

Exercice 1 On veut résoudre sur $I =]0,1[$ l'équation différentielle :

$$(x^2-1)y" + xy' - y = 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est un espace vectoriel.
2. Déterminer les solutions polynômiales de (E).
   On note P_0 l'unique polynôme de $\mathcal{S}$ vérifiant $P_0(1) = 1$.
3. On cherche les solutions de (E) sous la forme $y(x) = P_0(x)z(x)$.
   a) Montrer que z est solution de l'équation différentielle : $x(x^2-1)z" + (3x^2-2)z' = 0$
   b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z'(x) = \frac{\lambda}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in I$.
   c) Déterminer z en utilisant le changement de variable $x = \cos(t)$ pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Conclure et donner une base de $\mathcal{S}$.

Corrigé de l'exercice 1 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients non-constants.

1. $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de l'espace des fonctions continues sur I. De plus :
   – $0 \in \mathcal{S}$ (où 0 représente la fonction constante égale à zéro sur I)
   – $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, y = y_1 + \alpha y_2 \in \mathcal{S}$
   Le premier point est évident, le deuxième découle de la linéarité de la dérivation :
   $$\begin{aligned}(x^2-1)y" + xy' - y &= (x^2-1)(y_1+\alpha y_2)" + x(y_1+\alpha y_2)' - (y_1+\alpha y_2)\\ &= (x^2-1)(y_1" + \alpha y_2") + x(y_1' + \alpha y_2') - (y_1+\alpha y_2)\\ &= \big((x^2-1)y_1" + xy_1' - y_1\big) + \alpha\big((x^2-1)y_2" + xy_2' - y_2\big)\\ &= 0 + \alpha.0 = 0\end{aligned}$$
   Donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur I.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ une solution de (E), $P = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ où $a_n \neq 0$ ($n = \deg(P)$).
   $(x^2-1)P" + xP' - P$ est également un polynôme de degré n et son coefficient du terme du plus haut degré vaut :
   $$b_n = a_nn(n-1) + a_nn - a_n = a_n(n^2-1)$$
   Puisque $P \in \mathcal{S}$, on en déduit en particulier que $b_n = 0$ et donc que $\deg(P) = n = 1$. Ainsi $P = a_1x + a_0$ et si on injecte cette expression dans l'équation (E) :
   $$0 = (x^2-1).0 + xa_1 - (a_1x + a_0) = a_0$$
   D'où $\mathcal{S} \bigcap \mathbb{R}[X] = \{P(x) = ax, a \in \mathbb{R}\}$ et en particulier $P_0(x) = x$.
3. $y(x) = P_0(x)z(x) = xz(x)$
   a) Par dérivation : $y' = xz' + z$ et $y" = xz" + 2z'$. Si on injecte ces expressions dans l'équation (E) :
   $$\begin{aligned}(x^2-1)(xz" + 2z') + x(xz' + z) - xz &= 0\\ \Leftrightarrow \qquad x(x^2-1)z" + (3x^2-2)z' &= 0\end{aligned}$$
   b) z' est donc solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients non-constants. Les solutions pour $x \in I =]0,1[$ sont données par :
   $$\begin{aligned}z'(x) &= \exp\left(-\int \frac{3x^2-2}{x(x^2-1)}dx\right) = \exp\left(-\int\left(\frac{2}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right)dx\right)\\ &= \exp\left(-2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + constante\right)\\ &= \frac{\lambda}{x^2\sqrt{1-x^2}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

c) Par suite :
$$z(x) = \int \frac{\lambda dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$
On effectue le changement de variable $x = \cos(t) \Leftrightarrow t = \arccos(x)$ pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$dx = -\sin(t)dt \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1-x^2} = |\sin(t)| = \sin(t)$$
Ce qui donne :
$$\begin{aligned} z(x) &= \lambda \int \frac{-\sin(t)dt}{\cos^2(t)\sin(t)} = -\lambda \int \frac{dt}{\cos^2(t)} \\ &= -\lambda\left(\tan(t) + \mathit{constante}\right) = -\lambda \tan(\arccos(x)) + \mu, \qquad \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. On en déduit (quitte à changer la constante λ en $-\lambda$) :
$$\mathcal{S} = \{y(x) = \lambda x \tan(\arccos(x)) + \mu x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
En particulier $y_0(x) = x\tan(\arccos(x))$ et $P_0(x) = x$ forment une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 2 On veut calculer $I = \int_2^3 x \ln\left[(x-2)^2+1\right] dx$.
a) Calculer une primite de l'application $y \mapsto y\ln(y^2+1)$.
b) En posant $y = x-2$, montrer que $I = I_1 + 2I_2$ où :
$$I_1 = \int_0^1 y\ln(y^2+1)dy \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^1 \ln(y^2+1)dy$$
c) Calculer I_2 à l'aide d'une intégration par parties.
d) En déduire la valeur de I.

Corrigé de l'exercice 2 **a)** On procède par intégration par parties :
$$\begin{aligned} \int y\ln(y^2+1)dy &= \frac{y^2}{2}\ln(y^2+1) - \int \frac{y^3 dy}{y^2+1} = \frac{y^2}{2}\ln(y^2+1) - \int \left(y - \frac{y}{y^2+1}\right) dy \\ &= \frac{y^2}{2}\ln(y^2+1) - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \mathit{constante} \end{aligned}$$
b) On effectue le changement de variable $y = x-2 \Leftrightarrow x = y+2$ avec $x \in [2,3] \Leftrightarrow y \in [0,1]$ et $dx = dy$:
$$I = \int_2^3 x\ln\left[(x-2)^2+1\right] dx = \int_0^1 (y+2)\ln(y^2+1)dy = \int_0^1 y\ln(y^2+1)dy + 2\int_0^1 \ln(y^2+1)dy = I_1 + 2I_2$$
c) On procède par intégration par parties :
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \ln(y^2+1)dy = \left[y\ln(y^2+1)\right]_0^1 - \int \frac{2y^2 dy}{y^2+1} = (\ln(2) - 0) - 2\int \left(1 - \frac{1}{y^2+1}\right) dy \\ &= \ln(2) - 2\left[y - \arctan(y)\right]_0^1 = \ln(2) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4} - 0\right) = \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2 \end{aligned}$$
d) En utilisant **a)** :
$$I_1 = \left[\frac{y^2}{2}\ln(y^2+1) - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\right]_0^1 = \left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - 0\right) = \ln(2) - \frac{1}{2}$$
Puis en utilisant **b)** et **c)** :
$$I = I_1 + 2I_2 = \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2\right) = 3\ln(2) + \pi - \frac{9}{2}$$