Correction du contrôle continu n°2 en MS2

Exercice 1 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On commence par résoudre l'équation homogène, puis on utilise la méthode de variation de la constante. On obtient :

$$y(t) = t^2 - 2 + Ce^{-t^2/2} \qquad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Exercice 2 Il s'agit d'équations différentielles linéaires homogènes du deuxième ordre. La forme des solutions dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique. On obtient :

$$\begin{array}{ll} 1) & y(t) = \left(1 - \dfrac{3}{2}t\right) e^{t/2} \\ 2) & y(t) = \dfrac{4}{5}e^{-2t} + \dfrac{1}{5}e^{3t} \\ 3) & y(t) = (\cos(t) - 2\sin(t))\, e^t \end{array}$$

Exercice 3 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. On commence par résoudre l'équation homogène, puis on utilise la méthode de variation de la constante. On obtient :

$$y(t) = \frac{t\sin(t)}{2} + A\cos(t) + B\sin(t) \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes réelles.}$$

Exercice 4 En mettant f sous forme canonique, on reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle. Les lignes de niveau d'hauteur k sont :

- soit des cercles de centre $(-1, 2)$ et de rayon $\sqrt{k+2}$ pour $k > -2$;
- soit le point $(-1, 2)$ pour $k = -2$;
- soit le vide pour $k < -2$.

f n'admet pas de minimum, mais elle a un minimum unique de -2 au point $(-1, 2)$.

Exercice 5 1) Pour $x = 0$ et $y \neq 0$ on a $f(0, y) = y \to 0$ lorsque $y \to 0$.
Pour $x \neq 0$ et $y = 0$ on a $f(x, 0) = 1 \to 1$ lorsque $x \to 0$.
Donc f n'admet pas de limite lorsque $(x, y) \to (0, 0)$.
2) On vérifie en calculant les dérivées partielles que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2xy\,(y^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

BONNES VACANCES ! ! et bonnes révisions...