Correction du contrôle continu n°1 en MS2

Exercice 1 On décompose la fraction rationnelle en éléments simples.

$$\int \frac{x^5+1}{x^4+x^3+x^2}dx = \int \left(x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}-x-\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)+constante$$

Exercice 2 On utilise le changement de variable universel $t=\tan(x/2)$.

$$\int \frac{dx}{\cos(x)+\sin(x)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{-2dt}{\left(t-1+\sqrt{2}\right)\left(t-1-\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\left(\frac{1}{t-1+\sqrt{2}}-\frac{1}{t-1-\sqrt{2}}\right)dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan(x/2)-1+\sqrt{2}}{\tan(x/2)-1-\sqrt{2}}\right|+constante$$

Exercice 3

$$J=\int_1^3 \frac{\sqrt{x-1}+x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+x}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}dx$$

C'est une intégrale abélienne, on utilise le changement de variable $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$.

$$J=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{t+\frac{1+t^2}{1-t^2}}{t-1}.\frac{4tdt}{(1-t^2)^2} = 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{t^4-t^3-t^2-t}{(t-1)^4(t+1)^3}dt$$

Exercice 4

$$I_0=\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad I_1=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos(x)}=\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

(On utilise le changement de variable donné par les règles de Bioche $t=\sin(x)$ pour I_1.)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{n+2}(x)} \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n(x)} . \frac{1}{\cos^2(x)} dx \\
&= \left[\frac{1}{\cos^n(x)} \tan(x) \right]_0^{\pi/4} - n \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} \tan(x) dx \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n - n \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} dx \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n - n \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} dx \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n - n(I_{n+2} - I_n)
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$$

Exercice 5 On reconnaît une somme de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k/n}{\sqrt{1+(k/n)^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - 1$$

BONNES VACANCES ! !